

М.И. Ледовской

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ДЛЯ МИКРОКОНТРОЛЛЕРОВ

Известные алгоритмы вычисления квадратного корня предназначены, как правило, для режима вычислений с плавающей точкой [1]. В этом случае область аппроксимации функции $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) совпадает с интервалом изменения нормализованной мантиссы вещественного числа. Однако в микроконтроллерах режим плавающей точки зачастую не поддерживается, а его программная эмуляция приводит к значительным затратам процессорного времени. По этой причине математические вычисления выполняются в режиме фиксированной точки, где используется целочисленный формат представления данных.

Если в решаемой задаче аргумент квадратного корня принимает только целые значения, то можно ограничиться рассмотрением функции $Y = \sqrt{X}$ ($X \geq 0$) для нахождения целочисленного результата $0 \leq Y \leq 2^{n-1} - 1$, где n – разрядность формата данных (рис.1).

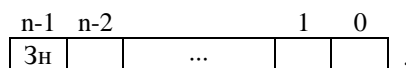


Рис.1. Формат целочисленного значения квадратного корня

В общем случае требуется вычислить функцию $y = \sqrt{x}$ для вещественных значений аргумента $x_{min} \leq x \leq x_{max}$. Такую задачу можно решить в целочисленном формате данных путем отображения операции $y = \sqrt{x}$ из интервала $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ в интервал $0 \leq X \leq 2^{n-1} - 1$ путем масштабирования [2]. В результате образуется целочисленная модель операции извлечения квадратного корня в виде

$$Y = 2^k \sqrt{2^n X}, \tag{1}$$

где $X = [x \cdot M_x]_{ц}$ и $Y = [y \cdot M_y]_{ц}$ – целочисленные аналоги вещественных переменных x и y , причем $0 \leq X \leq 2^{n-1} - 1$ и $0 \leq Y \leq 2^{n-1} - 1$; $M_x = 2^{n+r}$ и $M_y = 2^v$ – масштабы переменных x и y , выбираемые в виде целых степеней числа 2 (показатель r должен быть четным числом): $M_x \leq (2^{n-1} - 1) / x_{max}$, $M_y \leq (2^{n-1} - 1) / y_{max}$; $[\cdot]_{ц}$ – оператор округления до целого значения; $2^k = M_y / 2^{n+r/2}$ – выравнивающий коэффициент.

Поскольку коэффициент 2^k зависит от масштабов M_x и M_y , которые в свою очередь выбираются, исходя из конкретных значений x_{max} и y_{max} , то далее рассматривается неизменяемая часть модели, а именно: $Y = \sqrt{2^n X}$. Причем последняя приводится к обычному виду $Y = \sqrt{X}$, где новый аргумент X содержит множитель 2^n и находится в интервале аппроксимации $2^{2n-4} \leq X \leq 2^{2n-2}$ (рис.2). Заметим, что приведение аргумента X к указанному интервалу выполняется с помощью операций сдвига на четное число разрядов, что существенно упрощает пост-обработку получаемого результата.

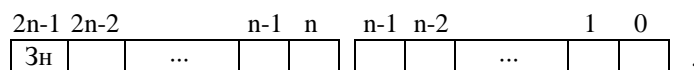


Рис.2. Формат целочисленного аргумента

Целочисленный результат Y связан с ожидаемым вещественным аналогом y соотношением вида $y^*=Y/M_y$, где y^* – приближенное вещественное значение квадратного корня. Возникающая разность $\gamma_y=y-y^*$ является погрешностью вычисления квадратного корня вещественного аргумента $y=\sqrt{x}$ с помощью целочисленной модели (1).

Рассмотрим аналитическую оценку погрешности γ_y , учитывая две причины ее появления. Во-первых, вещественный аргумент x представляется в n -разрядном целочисленном формате данных с погрешностью $|\beta_x| \leq \Delta x/2 = 1/(2M_x)$, где Δx – квант [2]. Следствием данного обстоятельства является трансформированная погрешность вещественного значения квадратного корня v_y . Во-вторых, значение квадратного корня Y содержит неизвестную погрешность целочисленного алгоритма ε_y . К ней добавляется погрешность округления β_k , возникающая при учете выравнивающего коэффициента $2^k < 1$. Эта погрешность подчиняется оценке $|\beta_k| \leq 1/2$. Суммарная погрешность $\varepsilon_y + \beta_k$ порождает соответствующую погрешность вещественного значения квадратного корня $\varepsilon_y = (\varepsilon_y + \beta_k)/M_y$. Таким образом, для погрешности γ_y справедлива оценка $|\gamma_y| \leq |v_y| + |\varepsilon_y|$.

Наиболее оптимальным соотношением между погрешностями v_y и ε_y является приближенный баланс $v_y \approx \varepsilon_y$, который в развернутой форме имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \beta_x \approx \frac{\varepsilon_y + \beta_k}{M_y} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4y_{\max}M_x} \approx \frac{\varepsilon_y + \beta_k}{M_y}. \quad (2)$$

Из (2) получаем оценку $|\varepsilon_y| \leq M_y/4y_{\max}M_x + |\beta_k| = 0,25 + 0,5 = 0,75$. Условие $|\varepsilon_y| \leq 0,75$ является требованием, которое предъявляется к целочисленному алгоритму вычисления квадратного корня.

Как известно [1], квадратный корень наиболее эффективно вычисляется с помощью итерационного метода Ньютона, который имеет высокую скорость сходимости при наличии хорошего начального приближения. Ниже предлагается алгоритм начального приближения, который отличается от известных алгоритмов рядом достоинств.

Начальное приближение в данном алгоритме определяется путем линейной аппроксимации функции квадратного корня $Y = \sqrt{X}$ по двум точным граничным значениям $Y(2^{2n-4}) = 2^{n-2}$ и $Y(2^{2n-2}) = 2^{n-1}$. Затем полученное приближение уточняется на величину методической погрешности, которая также аппроксимируется линейно на двух подынтервалах $2^{2n-4} \leq X \leq 2^{2n-3}$ и $2^{2n-3} < X \leq 2^{2n-2}$:

$$Y_0 = 2^{n-2} + 5 \cdot 2^{-(n+2)}(X - 2^{2n-4}) + \begin{cases} 2^{-(n+2)}(X - 2^{2n-4}), & \text{если } X \leq 2^{2n-3}; \\ 2^{-(n+2)}(2^{2n-2} - X), & \text{если } X > 2^{2n-3}. \end{cases} \quad (3)$$

Аналитический анализ методической погрешности алгоритма (3) показывает, что она подчиняется оценке $|\mu_{Y_0}| \leq 2^{n-5}$. Полная погрешность алгоритма ε_{Y_0} подчиняется такой же оценке, так как инструментальная погрешность пренебрежимо мала по сравнению с методической погрешностью.

При получении алгоритма (3) вместо операции деления на константу 3 введен сомножитель $5 \cdot 2^{-4}$, поскольку дополнительная погрешность, возникающая из-за такой замены, существенно меньше методической погрешности. Что же касает-

ся коэффициента 5, то он легко реализуется с помощью операции сдвига и сложения, если его представить в виде 2^2+1 . Следовательно, начальное приближение Y_0 определяется с помощью операций сдвига и сложения, которые в микроконтроллерах выполняются наиболее быстро. Кроме того, алгоритм (3) содержит константы, значения которых можно легко найти, располагая разрядностью формата данных n . Эта особенность позволяет быстро адаптировать предлагаемый алгоритм для любой наперед заданной разрядности n , что выгодно отличает его от известных алгоритмов [1].

На рис.3 приведен график погрешности начального приближения ε_{Y_0} , полученный путем моделирования алгоритма (3) при $n=8$ в системе Matlab7/Simulink6/Fixed-Point. Результаты моделирования подтверждают аналитическую оценку погрешности $|\varepsilon_{Y_0}| \leq 2^{n-5} = 8$.

Структура Simulink-модели для экспериментального анализа погрешности ε_{Y_0} приведена на рис.4. Затененные блоки модели реализуют алгоритм начального приближения (3), а остальные блоки служат для вычисления погрешности ε_{Y_0} . Simulink-модель запускается из m-файла, где задается набор значений целочисленного аргумента X из интервала аппроксимации от $2^{2n-4} = 2^{12} = 4096$ до $2^{2n-2} = 2^{14} = 16384$ с шагом 1, а также обеспечивается вывод графика погрешности ε_{Y_0} :

```
path(path, 'D:\MATLAB701\work')
open_system('SqrtTest1')
X=[4096:1:16384]
sim('SqrtTest1')
plot(X, simout(:))
hold on
grid on
hold off
```

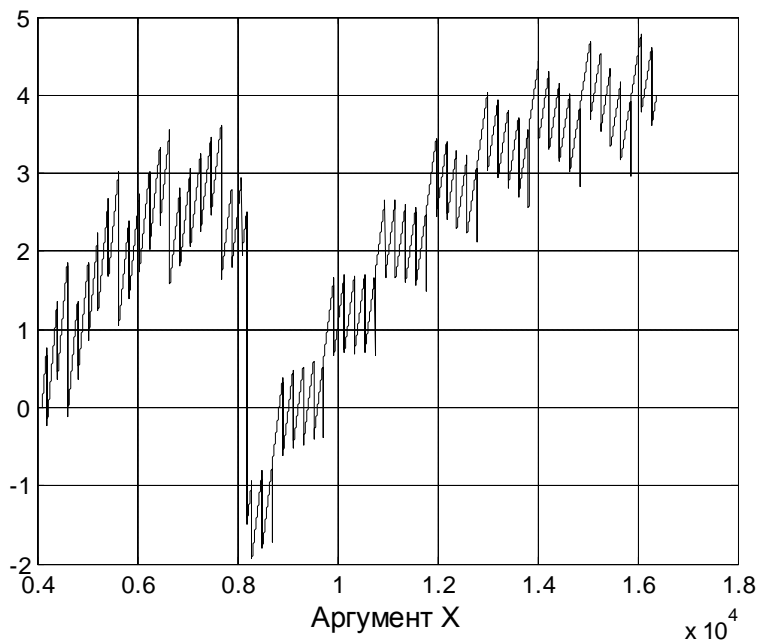


Рис.3. График погрешности начального приближения

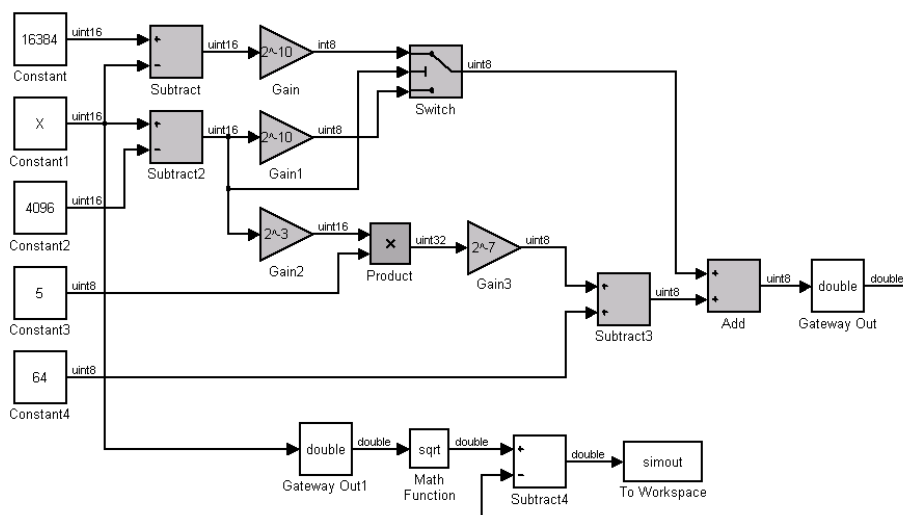


Рис.4. Simulink-модель для экспериментального анализа погрешности начального приближения

С учетом алгоритма (3) целочисленный алгоритм извлечения квадратного корня на основе метода Ньютона имеет вид

$$Y_0 = 2^{n-2} + 5 \cdot 2^{-(n+2)}(X - 2^{2n-4}) + \begin{cases} 2^{-(n+2)}(X - 2^{2n-4}), & \text{если } X \leq 2^{2n-3}; \\ 2^{-(n+2)}(2^{2n-2} - X), & \text{если } X > 2^{2n-3}. \end{cases}$$

$$Y_k = 2^{-l} \left(\frac{X}{Y_{k-1}} + Y_{k-1} \right), \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

где Y_0 – начальное приближение, m – количество итераций.

Количество итераций m в алгоритме (4) зависит от разрядности данных n , что отражено в приводимой таблице. При выполнении соотношений между n и m , указанных в таблице, погрешность целочисленного значения квадратного корня $Y \approx Y_m$ с учетом инструментальной погрешности подчиняется аналитической оценке $|\varepsilon_Y| \leq 0,63$. Заметим, что метод Ньютона компенсирует инструментальную погрешность, накопленную на предыдущей итерации. Поэтому при оценке погрешности ε_Y в расчет принималась только инструментальная погрешность на последней итерации.

Таблица

Разрядность n	8	16	32	64
Количество итераций m	1	2	3	4

На рис.5 приведен график погрешности целочисленного значения квадратного корня ε_Y , полученный путем моделирования алгоритма (4) при $n=8$ и $m=1$ в системе Matlab7/Simulink6/Fixed-Point. Результаты моделирования подтверждают аналитическую оценку погрешности $|\varepsilon_Y| \leq 0,63$.

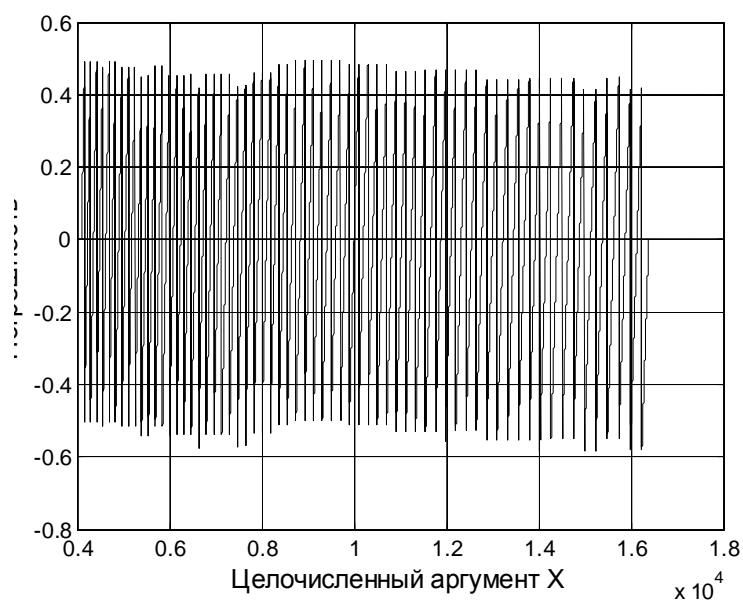


Рис.5. График погрешности целочисленного значения квадратного корня

Структура Simulink-модели для экспериментального анализа погрешности ε_{γ} приведена на рис.6. Здесь затененный блок SubSystem является подсистемой, в которой выполняется целочисленный алгоритм извлечения квадратного корня (4). Остальные блоки Simulink-модели предназначены для вычисления погрешности ε_{γ} . Simulink-модель запускается из m-файла по аналогии с моделью, приведенной на рис.4. Структура подсистемы SubSystem приведена на рис.7.

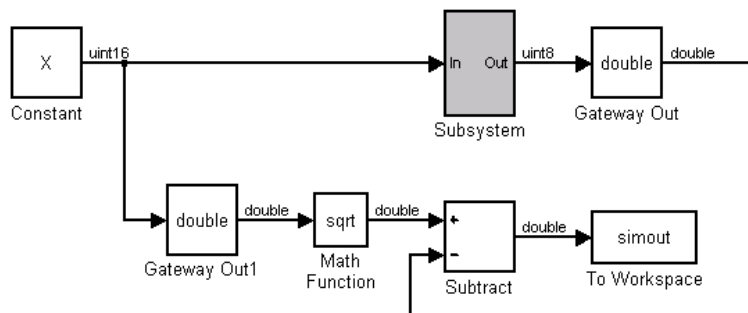


Рис.6. Simulink-модель для экспериментального анализа погрешности квадратного корня

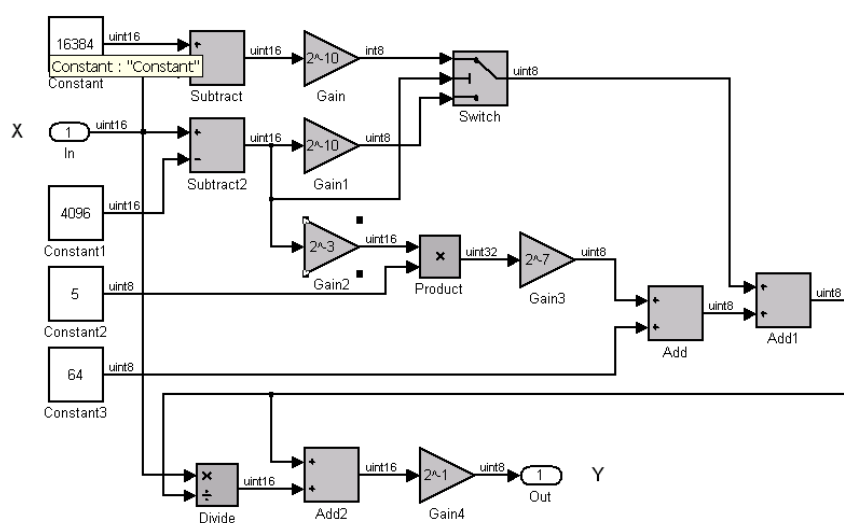


Рис.7. Подсистема SubSystem, реализующая целочисленный алгоритм вычисления квадратного корня

Алгоритм (4) можно использовать в микроконтроллерах для вычисления вещественных значений квадратного корня в целочисленном формате данных с любой наперед заданной точностью (разрядностью). Данный алгоритм не зависит от диапазонов изменения вещественных переменных и их масштабов, что обеспечивает его универсальность. Кроме того, алгоритм можно использовать для получения приближенного частного при обработке данных, которые по своей природе являются целочисленными. Алгоритм является простым в применении, поскольку он легко адаптируется к любой разрядности обрабатываемых данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. – Киев: «Наукова думка», 1984. – 599с.
2. Ледовской М.И. Обработка вещественных данных в микроконтроллерах с арифметикой фиксированной точки // Известия ТРТУ. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004, №2 (37). С. 52-58.

А.В. Красулин

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МИКРОПРОЦЕССОРНОГО КОМПЛЕКСА УПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИМ УСТРОЙСТВОМ

Применение цифровых систем управления в целом и электротехническими устройствами [1] в частности получает всё более широкое применение. По сравнению с аналоговыми системами они обладают не только меньшими габаритами, но и рядом чисто технических преимуществ: более высокими показателями помехоустойчивости и точности и, что немаловажно, четко прослеживается тенденция снижения рыночной стоимости микроконтроллеров, на базе которых разрабатываются системы данного класса.