3. *Bershtein L.S.*, *Bozhenyuk A.V.*, *Rozenberg I.N.* Fuzzy Graph Vitality Degree Increase on the Base of Strong Connection // Proceedings of East West Fuzzy Colloquium 2005. 12th Zittau Fuzzy Colloquium. Zittau: Hochschule Zittau\ Goerlitz. 2005. – P. 309–312.

УДК 528

А.Э. Саак

КАНОНИЧЕСКИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Эксперимент спроса-предложения вычислительных ресурсов при функционировании МВС со множеством пользователей базировался на классических комбинаторных моделях Бернулли и Лапласа [1, 2]. Последние полагают в свою основу алгебру весовых совмещений комбинируемых элементов и алгебру геометрических совмещений, соответственно. Несколько иной тип совмещений элементов применяется в модели комбинирования кратных целочисленных разностей Ньютона. В предлагаемой работе на основе базовых алгебраических операций сдвига и разности в Z-среде целочисленных распределений вводятся упомянутые биномиальная и геометрическая комбинаторные модели. Первая из них дополняется моделью Ньютона в качестве присоединённого распределения кратных Z-разностей по отношению к прямой форме биномиальной композиции идентичных двузначных Z-распределений.

Рассмотрим сочетательный выбор j из «k» единичных звеньев линейного полигона $[0,k]\subset Z$. Мощность множества данных сочетаний равна

$$C_k^{(j)}, \ \ j = 0, 1, \dots, k \ .$$

Полученное распределение называем комбинаторной моделью Бернулли. Алгебру исходов данного эксперимента удобно формализовать производящей операторной функцией единичного сдвига в Z-среде

$$\sum_{j_1=0}^{k} C_k^{(j_1)} S_1^{j_1} = (1+S_1)^k, \quad S_1 y(j_1) = y(j_1+1) \ .$$

Производящий бином Бернулли отвечает алгебре весовых совмещений

$$S_1^{j_1'} S_1^{j_1''} = S_1^{j_1'+j_1''}$$

нагруженных комбинаторных элементов.

Обратимся к испытаниям Лапласа. С этой целью осуществим комбинирование предыдущих выборок j из «k» единичных звеньев. При k-кратном комбинировании указанных выборок линейной меры j получаем мощность множества комбинаций

$$\prod_{1}^{k} j = j^k$$

согласно правилу мощности комбинаций. Факторизация данных исходов в случае неразличимости выборок уменьшит полученную разместительную мощность в $k!$ раз

$$j^k \to\to j^k / k!, \ \ j = 1, 2, \dots, k \ .$$

Последнее распределение исходов называем комбинаторной моделью Лапласа. Объединение данных исходов образует объемлющее множество эксперимента и имеет меру

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{j^k}{k!}=\frac{k^k}{k!}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^k=\frac{k^{k+1}}{k!}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^k\Delta\frac{j}{k}\approx\frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^1 x^k dx=\frac{k^k}{k!}\frac{k}{k+1},\quad k>>1\ .$$

Исходы на единицу меньшей меры ребра координатных котетраэдров принимаем в качестве ординарных исходов рассматриваемых испытаний – однородной системы базисных подмножеств в объемлющем координатном котетраэдре с ребром «k» в R^k (рис. 1).

$$\frac{k^k}{k!}\to\to\frac{(k-1)^k}{k!}\to\to$$

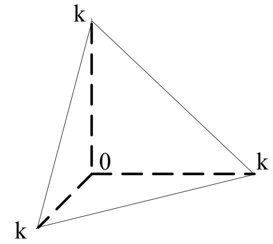

Рис. 1. Объемлющий координатный котетраэдр

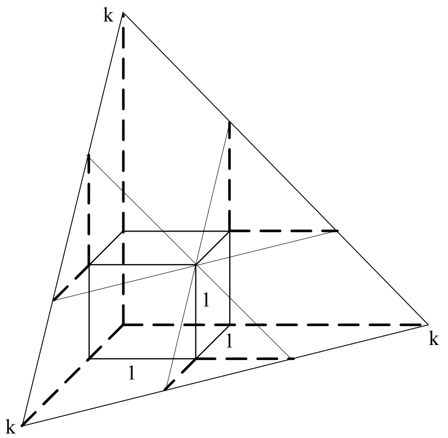

Рис. 2. Единичный координатный куб и дополнительные к кубу координатные котетраэдры

Уменьшение ребра на 1 трактуем в качестве результата сдвига основной вершины на 1 вдоль одной из координатных осей. Таким образом, имеется «k» ординарных исходов, и мощность их косуммы равна

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^{(j)}(k-j)^k/k!=1\,.$$

Величина справа 1^k=1 отвечает результату всех единичных сдвигов основной вершины – единичному кубу в R^k. Предыдущая формула Теппера [3] означает, что объемлющий координатный котетраэдр складывается из единичного координатного куба и всех дополнительных к кубу координатных котетраэдров с ребром на 1 меньшей длины, чем у основного котетраэдра (рис. 2). Последние элементы с операциями геометрического объединения и пересечения индуцируют алгебру исходов канонического эксперимента Лапласа.

Сопоставим единичному линейному полигону $[0,k]\subset Z$ правильный единичный полигон на комплексной плоскости

$$W_1^{j_1},\ \ j_1=0,1,\ldots,k-1,\ \ W_1=\exp\left(i\frac{2\pi}{k}\right).$$

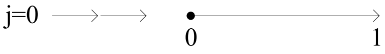

Рис. 3. Идеальный элемент испытаний Ньютона

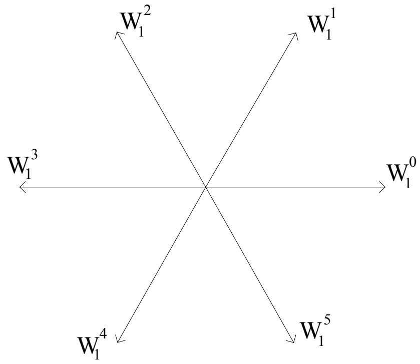

Рис. 4. Радиус-векторы единичного полигона на комплексной плоскости

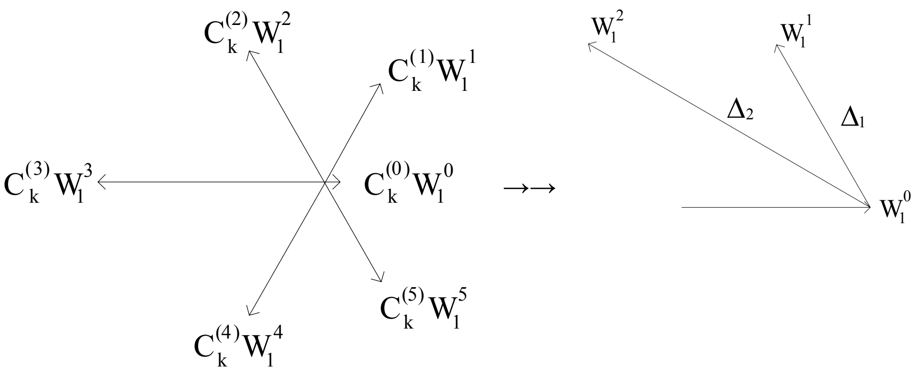

Рис. 5. Гомотетии радиус-векторов и хорды полигона

Рассмотрим алгебры горизонтальных и круговых единичных переходов. Приведём формулу Ньютона

$$Y(k) = (1+\Delta_1)^k Y(0), \quad S_1^k Y(0) = Y(k).$$

Последняя допускает представление в виде

$$(1+S_1)^k \Delta_1(0), \quad \Delta_1(j_1) = \Delta_1^{j_1} Y(0), \quad \Delta_1^0 = 1 \;,$$

$$S_1 \Delta_1(0) = \Delta_1^1 Y(0), \ldots, \quad S_1^{j_1} \Delta_1(0) = \Delta_1^{j_1} Y(0) \;.$$

Таким образом, распределение *Z*-разностей Ньютона

$$\Delta_1^{j_1} Y(0), \; \Delta_1^{j_1} Y(0) = (S_1 - 1)^{j_1} Y(0)$$

отвечает присоединённой алгебре по отношению к алгебре сдвигов в эксперименте Бернулли. Данная присоединённая алгебра сдвигов принимается в качестве комбинаторной модели Ньютона. Укажем гармоническое представление моделей Бернулли и Ньютона. Гармоникам

$$C_k^{(j)} W_1^{\,j}, \;\; j_1 = 1, \ldots, k \tag{1}$$

отвечает сочетательный выбор *j* из «*k*» чисел $\{W_1\}$. Выбор *j*=0 даёт исход полного неуспеха в «*k*» испытаниях Бернулли. В испытаниях Ньютона сохраняется идеальный элемент (рис. 3), а сочетательный выбор применяется к тому же множеству «k» идентичных комплексных отрезков $\{W_1\}$. Однако в биномиальной модели выбор может быть представлен гомотетией (1) радиуса-вектора единичного полигона (рис. 4)

$$W_1^{j_1} \to\to C_k^{(j_1)} W_1^{j_1},$$

тогда как в модели последовательных Z-разностей осуществляется сопоставление

$$\left\{W_1^0, W_1^1, \ldots, W_1^{j_1-1}\right\} \to\to \sum_{j_1^{'}=0}^{j_1} (-1)^{j_1^{'}} C_{j_1}^{\left(j_1^{'}\right)} W_1^{j_1^{'}}$$

указанному множеству – звена полигона W_1–1, хорды полигона W_1^2–$2W_1$+1 – 1-го порядка, хорды 2-го порядка $(W_1–1)^3$, и т.д. (рис. 5).

Общая формула Ньютона Z-распределения

$$Y(k) = \sum_{j_1=0}^{k} C_k^{(j_1)} \Delta^{j_1} Y(0)$$

с неидентичными отсчётами $Y(j_1)$ приводит к составному сочетательному выбору j из «k» звеньев единичного полигона с последующим умножением выбранного веса S_1^j на числовой множитель f_j. Получаем обобщённый биномиальный эксперимент с производящей формой

$$\sum_{j_1=0}^{k} C_k^{(j_1)} S_1^{j_1} f_{j_1} \to\to \sum_{j_1=0}^{k} C_k^{(j_1)} f_{j_1}\ .$$

Индуцируемый последней Z-интеграл образует форму Ньютона, по отношению к которой бином Ньютона–Бернулли является модельным частным случаем. Производящую форму Бернулли в действии на ньютонов фактор

$$(1 + S_1)^k \Delta(0), \quad \Delta(j) = \Delta^j Y(0) = f_j$$

принимаем в качестве обобщённой модели канонических кубических слоёв – общей модели спроса «k» пользователей на вычислительный ресурс одного рода. Производящую форму Лапласа

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^{(j)} (k-j)^k / k!\, S_1^j$$

в действии на предыдущий ньютонов фактор

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^{(j)} f_j\, (k-j)^k / k!$$

принимаем в качестве обобщённой модели координатных котетраэдров – общей модели предложения вычислительных ресурсов в ответ на указанный спрос. Выбор показательного распределения

$$Y(j) = 2^j \to\to f_j = \Delta^j Y(0) = 1$$

возвращает нас к первоначальным моделям канонического спроса-предложения Бернулли и Лапласа.

В итоге возникает достаточно широкий класс комбинаторных экспериментов, расширяющий ранее имевшиеся возможности моделирования МВС со множеством пользователей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Саак А.Э.* Алгебро-метрологические свойства комбинаторных моделей МВС // Труды III Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO’ 2006. М., 2006. – С. 1452–1457.
2. *Саак А.Э.* Комбинаторный эксперимент как модель многопроцессорных вычислительных систем коллективного пользования // Труды II Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO’ 2004. М., 2004. – С. 871–883.
3. *Егорычев Г.П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 285 с.