3.0), либо может уступать им (в частности Aros Fractal уступает по быстродействию в 3 и более раз), но при этом обладает намного более широким функционалом и гибкими настройками. КТС позволяет полностью контролировать процесс генерации и отслеживать координаты областей участков.

Быстродействие и эффективность программы в КТС Mathematica в то же время зависят от сложности нелинейной комплексной функции и степени оптимизации алгоритма ее вычисления, эффективности используемых встроенных функций графики КТС, а также применяемых настроек директив и опций.

Система Mathematica универсальна и позволяет работать со сколь угодно малыми приближенными с машинной точностью числами. Зная необходимое комплексное преобразование, можно получить любое фрактальное изображение или его сколь угодно малую часть. Алгоритмы построения и расчета точек прозрачны, что позволяет их оптимизировать при необходимости в зависимости от особенностей конкретного комплексного преобразования (фрактала). Система показывает хорошие результаты по скорости построения изображений и обладает универсальным и удобным инструментарием для формирования фрактальных изображений и исследования фрактальных структур.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы / Перевод с английского Логунова А.Р. – Москва, 2002.
2. *Никулин Е.А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

УДК 536.2

Д.М. Матяшов, О.А. Губеладзе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДВУХСЛОЙНОМ ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

При долговременной эксплуатации шахтных сооружений необходимо знать, как изменяется температура воздуха внутри сооружения с течением времени. Особенно актуальным является вопрос определения температуры воздушной среды при отключении систем обеспечения температурно-влажностного режима в сооружении на определенном этапе его эксплуатации. Для решения данной задачи необходимо исследовать процессы теплообмена в массиве, окружающем сооружение.

Рассмотрим полый двухслойный цилиндр конечных размеров, размещенный в однородной среде с постоянной температурой. В полости цилиндра температура постоянная, отличная от начального распределения температуры внутри цилиндра. В некоторый момент времени начинает действовать источник тепла постоянной мощности. Требуется найти распределение температуры в цилиндре в любой момент времени.

Задача делится на два этапа. На первом этапе известна температура на внутренней и внешней поверхностях цилиндра (граничные условия 1 рода), на втором этапе во внутренней полости размещен источник тепла постоянной мощности (граничное условие 3 рода).

Для решения задачи необходимо найти распределение температуры в неограниченном цилиндре и неограниченной пластине, далее с использованием метода суперпозиции находится общее решение.

Дифференциальное уравнение (ДУ) теплопроводности в цилиндрических координатах на первом этапе запишется следующим образом:

$$a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(\tau,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_i(\tau,r)}{\partial r}\right)=\frac{\partial T_i(\tau,r)}{\partial \tau}, \tag{1}$$

где $i=1{,}2$ – номер слоя; a_i – температуропроводность i-го слоя; $T_i(\tau,r)$ – температура в i-м слое; r – радиус ; τ – время.

Краевые условия следующие:

$$T(0,r)=T_0; \tag{2}$$

$$T(\tau,r_0)=T_в; \tag{3}$$

$$T_2(\tau,r_0+\delta)=T_{гр}; \tag{4}$$

$$\lambda_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r0+\delta1}=\lambda_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{r0+\delta1}; \tag{5}$$

$$T_1\big|_{r0+\delta1}=T_2\big|_{r0+\delta1}; \tag{6}$$

где T_0 – начальная температура цилиндра; $T_в$ – температура среды в полости цилиндра; $T_{гр}$ – температура среды на поверхности цилиндра; r_0 – внутренний радиус цилиндра; δ – толщина цилиндра; δ_1 – толщина первого слоя; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности слоев.

Решение ищется в виде суммы частного решения неоднородного ДУ (1) и общего решения однородного ДУ вида

$$a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(\tau,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_i(\tau,r)}{\partial r}\right)=0. \tag{7}$$

Для отыскания частного решения воспользуемся методом разделения переменных и представим искомую функцию в виде

$$N_i(\tau,r)=Z_i(\tau)\cdot X_i(r). \tag{8}$$

Здесь

$$X_i(r)=\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{i,j}J_0(\mu_j r)+B_{i,j}Y_0(\mu_j r)\right], \tag{9}$$

$$Z_i(\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}exp\left(-a_i\mu_j^2\tau\right), \tag{10}$$

 – характеристические числа задачи; $J_0(\mu_j r), Y_0(\mu_j r)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

Подставив (8) в граничные условия (3) – (6) и учтя, что $J_0'(z)=-J_1(z)$, $Y_0'(z)=-Y_1(z)$ [1], получим определитель для нахождения собственных чисел характеристического уравнения, который имеет вид

$$\begin{vmatrix} J_0(\mu r_0) & Y_0(\mu r_0) & 0 & 0 \\ J_0(\mu(r_0+\delta_1)) & Y_0(\mu(r_0+\delta_1)) & -J_0(\mu(r_0+\delta_1)) & -Y_0(\mu(r_0+\delta_1)) \\ \lambda_1 J_1(\mu(r_0+\delta_1)) & \lambda_1 Y_1(\mu(r_0+\delta_1)) & -\lambda_2 J_1(\mu(r_0+\delta_1)) & -\lambda_2 Y_1(\mu(r_0+\delta_1)) \\ 0 & 0 & J_0(\mu(r_0+\delta)) & Y_0(\mu(r_0+\delta)) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Система имеет решение, отличное от тривиального, только когда определитель (11) равен нулю.

Решая определитель относительно μ, определим собственные числа задачи.

Необходимо найти коэффициенты A_j, B_j в (9) для каждого из характеристических чисел μ_j. Выразив B_j через A_j и воспользовавшись условием ортогональности функций, получим

$$A_{i,j}=\frac{\int\limits_{r0}^{r+\delta} r\left(T(0,r)-T_i(r)\right)\left[J_0\left(\mu_j r\right)-Y_0\left(\mu_j r\right)\cdot\frac{J_0\left(\mu_j r_0\right)}{Y_0\left(\mu_j r_0\right)}\right]dr}{\int\limits_{r0}^{r+\delta} r\left(J_0\left(\mu_j r\right)-Y_0\left(\mu_j r\right)\cdot\frac{J_0\left(\mu_j r_0\right)}{Y_0\left(\mu_j r_0\right)}\right)^2 dr}. \tag{12}$$

Здесь $T_i(r)$ – распределение температуры в стационарном режиме.

Интегрирование (12) проводится численным методом. Для определения $T_i(r)$ решим (7), решение представим в виде

$$T_i(r)=A_i\,ln\,r+B_i. \tag{13}$$

Подставив (13) в (3) – (6), получим

$$A_2=\frac{T_в-T_{гр}}{ln\left(\frac{r_0+\delta_1}{r_0}\right)\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-ln\left(\frac{r_0+\delta_1}{r_0+\delta}\right)};\quad A_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}A_2;\quad B_1=T_в-A_1\,ln(r_0);$$

$$B_2=T_{гр}-A_2\,ln(r_0+\delta).$$

Распределение температуры в неограниченном цилиндре при постоянной температуре в полости запишется как:

$$T_ц(\tau,r)=\begin{cases}T_1(r)+N_1(\tau,r)\,если\;r_0\le r\le\left(r_0+\delta_1\right);\\ T_2(r)+N_2(\tau,r)\,если\;\left(r_0+\delta_1\right)\le r\le\left(r_0+\delta\right).\end{cases} \tag{14}$$

Решение для неограниченной многослойной пластины приведено в [2]. В соответствии с принципом сложной суперпозиции [3] относительная температура ограниченного цилиндра представляется как произведение относительных температур цилиндра и пластины.

На втором этапе решения задачи ДУ теплопроводности для неограниченного цилиндра имеет вид

$$-a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(\tau,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_i(\tau,r)}{\partial r}\right)+\frac{\omega}{c_i\rho_i}=\frac{\partial T_i(\tau,r)}{\partial\tau}, \tag{15}$$

где ω – мощность источника тепла; c_i, ρ_i – соответственно удельная теплоемкость и плотность i-го слоя.

Краевые условия следующие:

$$T(0,r)=T_ц(\tau,r); \tag{16}$$

$$-\lambda_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r0}+\alpha\left(T_в-T(\tau,r_0)\right)=0; \tag{17}$$

$$T_2(\tau,r_0+\delta)=T_{гр}; \tag{18}$$

$$\lambda_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r0+\delta1}=\lambda_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{r0+\delta1}; \tag{19}$$

$$T_1\Big|_{r0+\delta 1} = T_2\Big|_{r0+\delta 1} . \quad (20)$$

Согласно [4] при свободной конвекции на вертикальной стенке коэффициент теплоотдачи равен

$$\alpha(\tau) = 1{,}66 \cdot \sqrt[3]{\left(T_в(\tau) - T(\tau, r_0)\right)} . \quad (21)$$

Перенесем в (15) свободный член в правую часть уравнения. Тогда решение уравнения (15) запишется как сумма общего решения уравнения (7) и частного решения уравнения (15) при граничных условиях (17)-(20). Общее решение (7) с учетом (21) запишется как

$$T_i(r) = A_i \ln r + B_i , \quad (22)$$

где $A_1 = -\dfrac{(\alpha(\tau))^4}{1{,}66^3} \cdot \dfrac{r_0}{\lambda_1}$; $A_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} A_1$; $F = 2\pi \cdot r_0 H$ – площадь внутренней поверхности цилиндра; H – высота цилиндра. Коэффициенты B_1, B_2 находятся так же, как и на первом этапе решения.

Частное решение уравнения (15) ищется в виде

$$P(\tau, r) = H(\tau, r) + G(r),$$

где $H(\tau, r)$ – частное решение уравнения (1) при краевых условиях (16) – (20); $G(r)$ – частное решение уравнения вида

$$a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(\tau, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_i(\tau, r)}{\partial r}\right) = \frac{\omega}{c_i \rho_i} . \quad (23)$$

Решение (23) отыскивается в виде

$$R_i(r) = A_i \ln r + B_i + C_i r^2 . \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$C_i = \frac{\omega}{4 a_i c_i \rho_i} = \frac{\omega}{4\lambda_i} ,$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности i -го слоя.

Подставив (24) в граничные условия (17) – (20), получим

$$A_1 = \frac{(\alpha(\tau))^4}{1{,}66^3} \cdot \frac{r_0}{\lambda_1} - 2C_1 r_0^2 ;$$

$$A_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(A_1 + 2C_1 (r + \delta_1)^2\right) - 2C_2 (r + \delta_1)^2 ;$$

$$B_2 = T_{гр} - A_2 \ln(r_0 + \delta) - C_2 (r + \delta)^2 ;$$

$$B_1 = B_2 + A_2 \ln(r_0 + \delta_1) + C_2 (r + \delta_1)^2 - A_1 \ln(r_0 + \delta_1) - C_1 (r + \delta_1)^2 .$$

Частное решение уравнения (23) равно

$$G(r) = \begin{cases} R_1(r)\, если\ r_0 \le r \le (r_0 + \delta_1); \\ R_2(r)\, если\ (r_0 + \delta_1) \le r \le (r_0 + \delta). \end{cases}$$

При отыскании $H(\tau, r)$, являющегося решением уравнения (1), определитель запишется в виде

$$\begin{vmatrix} J_1(\mu r_0) & Y_1(\mu r_0) & 0 & 0 \\ J_0(\mu(r_0+\delta_1)) & Y_0(\mu(r_0+\delta_1)) & -J_0(\mu(r_0+\delta_1)) & -Y_0(\mu(r_0+\delta_1)) \\ \lambda_1 J_1(\mu(r_0+\delta_1)) & \lambda_1 Y_1(\mu(r_0+\delta_1)) & -\lambda_2 J_1(\mu(r_0+\delta_1)) & -\lambda_2 Y_1(\mu(r_0+\delta_1)) \\ 0 & 0 & J_0(\mu(r_0+\delta)) & Y_0(\mu(r_0+\delta)) \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты A_j равны

$$A_{i,j} = \frac{\int_{r0}^{r+\delta} r\left(T_ц(\tau,r) - T_i(r)\right)\left[J_0(\mu_j r) - Y_0(\mu_j r)\cdot\frac{J_1(\mu_j r_0)}{Y_1(\mu_j r_0)}\right]dr}{\int_{r0}^{r+\delta} r\left(J_0(\mu_j r) - Y_0(\mu_j r)\cdot\frac{J_1(\mu_j r_0)}{Y_1(\mu_j r_0)}\right)^2 dr}.$$

Тогда $H_i(\tau,r) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\left[J_0(\mu_j r) - Y_0(\mu_j r)\frac{J_0(\mu_j(r_0+\delta))}{Y_0(\mu_j(r_0+\delta))}\right]\cdot exp\left(-\mu_j^2 a_i \tau\right).$

Общее решение уравнения (15) запишется следующим образом:

$$T_i(\tau,r) = H_i(\tau,r) + G(r) + T_i(r).$$

Зная коэффициент теплоотдачи на внутренней стенке шахтного сооружения, можно найти температуру стенки сооружения в любой момент времени, откуда с использованием (21) выражается температура воздуха в сооружении. Таким образом, было получено аналитическое выражение для температурного поля двухслойного полого цилиндра конечных размеров, внутри которого действует источник постоянной мощности.

Расчет, проведенный по полученным формулам, подтверждается данными экспериментальных исследований [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бейтмен Г. , Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. –М.: Наука, 1966. – 296 с.
2. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности: Учебное пособие. Ч. I. – М.: Высшая школа, 1982. – 327 с.
3. *Пехович А.И., Жидких В.М.* Расчеты теплового режима твердых тел. –Л.: Энергия, 1976. –352 с.
4. *Богословский В.Н.* Строительная теплофизика. –М.: Высшая школа, 1982. – 460 с.
5. *Агафонов Ю. Н., Жук В. И. и др.* Определение характеристик конвективного теплообмена при прогнозировании теплового режима шахтных сооружений. РК техника. Научно-технический сборник, 1988, с. 26-33.

УДК 681.533

А.П. Цепа

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРВИЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПЛОТНОСТИ КАМЕРТОННОГО ТИПА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается первичный преобразователь (ПП) камертонного типа, основанный на частотном методе измерения. В ПП возбуждаются колебания на механическом резонансе системы, включающей в себя мембрану и лопасти камертона. При погружении ПП в жидкость мембрана и лопасти нагружаются жидкостью. Это нагружение можно приближенно описать добавлением к системе эквивалентной присоединенной массы жидкости, в результате чего резонансная частота из-