

УДК 621.372.54

Е.А. Семерников, Е.Е. Семерникова, И.Л. Трунов

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ УСТОЙЧИВЫХ КОНВЕЙЕРНЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Известно, что некоторые цифровые рекурсивные фильтры в процессе конвейеризации по методу опережающих вычислений могут потерять устойчивость [1,2,3]. Это связано с тем, что конвейеризация приводит к увеличению порядка фильтра и появлению дополнительных корней полинома знаменателя. Появление дополнительных корней приводит к необходимости исследования устойчивости конвейеризованного фильтра. Поскольку любой цифровой рекурсивный фильтр можно представить в виде последовательного включения рекурсивных фильтров первого и второго порядка, а звенья первого порядка всегда устойчивы, то исследования устойчивости фильтров можно ограничить фильтрами второго порядка [3].

Замечено, что не все фильтры теряют устойчивость при конвейеризации, и это, несомненно, связано с особенностями характеристического уравнения исходного фильтра. Поэтому становится правомерной постановка задачи определения параметров характеристического уравнения исходного фильтра, при которых конвейеризация не приводит к потере устойчивости. Такими параметрами могут являться корни характеристического уравнения, поскольку они однозначно определяют как само уравнение, так и избирательные свойства фильтра. В результате этих исследований могут быть определены области расположения корней исходного фильтра, для которых выбранный уровень конвейеризации не приводит к потере устойчивости. Будем называть такие области областями устойчивости. Обладая информацией о таких областях для различных уровней конвейеризации, можно ставить вопрос о разработке адаптивных рекурсивных фильтров с гарантированной устойчивостью.

Разностное уравнение и передаточная функция $H_n(z)$ цифрового рекурсивного фильтра второго порядка имеют вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}; \quad (1)$$

$$H_n(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} = \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}, \quad (2)$$

где x_n и y_n – входная и выходная цифровые последовательности; b_i и a_i – вещественные коэффициенты нерекурсивной и рекурсивной частей фильтра; z_i и p_i – нули и полюсы передаточной функции.

Полюсы p_1 и p_2 передаточной функции (2) могут быть получены как корни характеристического уравнения полинома знаменателя $x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = 0$.

Для устойчивости рекурсивного цифрового фильтра необходимо и достаточно [4, 5], чтобы все полюсы его передаточной функции лежали внутри единичной окружности комплексной Z -плоскости $|p_i| < 1, i = 1, 2$.

Схема вычислений, соответствующая уравнению (1), представленная в виде графа потоков данных (ГПД) [2, 9], показана на рис. 1.

Известно [1, 2], что быстродействие операционного устройства, выполняющего действия, предписанные ГПД, определяется временем вычислений (периодом итерации) в рекурсивной части фильтра, так как нельзя начать следующую итерацию, пока не завершатся все вычисления в текущей итерации. С целью ускорения вычислений целесообразно использовать конвейерное построение устройств суммирования 7 и умножения 8, 9. Однако простое введение дополнительных конвейерных регистров в циклы обратной связи дополнительно к регистрам 10 и 11 приведет к нарушению межитерационного информационного предшествования и, как следствие, к искажению алгоритма работы фильтра.

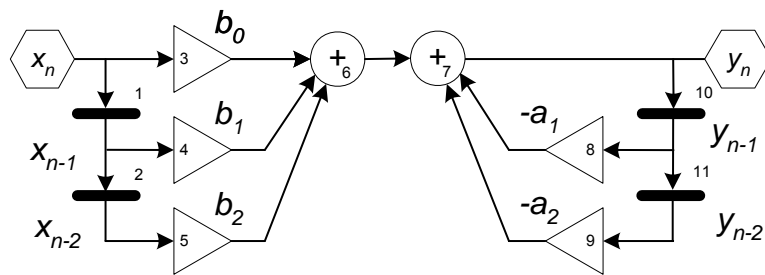


Рис. 1. ГПД рекурсивного фильтра второго порядка

Для корректного введения в рекурсивный фильтр дополнительных конвейерных регистров применяют метод опережающих вычислений (look-ahead computation) и метод ресинхронизации (retiming) [1, 2]. Метод опережающих вычислений основывается на эквивалентных преобразованиях разностного уравнения, описывающего рекурсивный фильтр, и позволяет добавить в циклы конвейерные регистры, а ресинхронизация позволяет оптимально разместить конвейерные регистры по вычислительному устройству.

Представив разностное уравнение (1) в виде $y_n = v_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}$, где $v_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$, и выполнив некоторые эквивалентные преобразования [3], получим

$$y_n = v_n + \sum_{i=1}^d A_i v_{n-i} + K1_d y_{n-d-1} + K2_d y_{n-d-2} . \quad (3)$$

где A_i – коэффициенты при v_{n-i} ; $K1_d$ и $K2_d$ – коэффициенты при y_{n-d-1} и y_{n-d-2} . Параметр d характеризует уровень конвейеризованности фильтра и соответствует количеству дополнительных конвейерных регистров (задержек), включаемых в циклы рекурсивной части фильтра.

Коэффициенты A_d , $K1_d$ и $K2_d$ можно получить с помощью рекурсивных формул [3]:

$$\begin{aligned} A_i &= K1_{i-1}; \\ K1_i &= -a_1 \cdot K1_{i-1} + K2_{i-1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$K2_i = -a_2 \cdot K1_{i-1},$$

при начальных условиях $K1_0 = -a_1$, $K2_0 = -a_2$.

Как показано в [3], передаточную функцию конвейеризованного фильтра $H_K(z)$ можно представить в следующем виде:

$$H_K(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \cdot \frac{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}}{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}} = H_H(z) \cdot H1_K(z). \quad (5)$$

Здесь $H_H(z)$ - передаточная функция исходного фильтра второго порядка (2); $H1_K(z)$ - конвейеризующий фильтр с передаточной функцией

$$H1_K(z) = \frac{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}}{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}} = \frac{(1 - z_3 z^{-1}) \cdot (1 - z_4 z^{-1}) \dots (1 - z_{d+2} z^{-1})}{(1 - p_3 z^{-1}) \cdot (1 - p_4 z^{-1}) \dots (1 - p_{d+2} z^{-1})}. \quad (6)$$

Конвейеризующий фильтр включен последовательно с исходным фильтром. Этот фильтр возник вследствие эквивалентных преобразований разностного уравнения (1) в разностное уравнение вида (3), описывающее конвейеризованный фильтр с уровнем конвейеризации d .

Произведение полинома знаменателя $H_H(z)$ на полином знаменателя $H1_K(z)$ дает полином конвейеризованного фильтра

$$(1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}) \cdot (1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}) = 1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2}. \quad (7)$$

При этом передаточная функция конвейеризованного фильтра представляется в виде

$$H_K(z) = \frac{(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot (1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d})}{1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2}}. \quad (8)$$

Коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции $H_K(z)$ при z^{-1} , z^{-2} , ..., z^{-d} равны нулю. В ГПД конвейеризованного фильтра, показанного на рис. 2, это соответствует отсутствию отводов с устройствами умножения после регистров 17, 18, ..., 19. Именно это и позволяет, используя метод ресинхронизации, перераспределить d регистров по циклам рекурсивной части фильтра, включив их в качестве конвейерных регистров в состав сумматора 14 и в умножители 15, 16, и уменьшить тем самым период итерации ГПД.

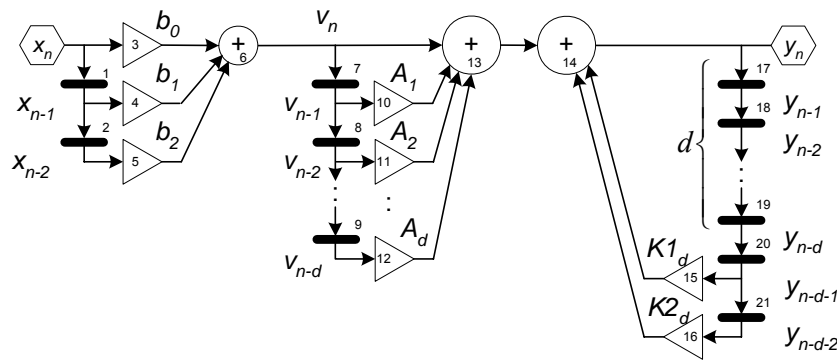


Рис. 2. ГПД конвейеризованного фильтра с уровнем конвейеризации d

При анализе устойчивости конвейеризованного фильтра будем исходить из того, что исходный фильтр с передаточной функцией $H_H(z)$ устойчив – $|p_1| < 1$ и $|p_2| < 1$. В этом случае будет достаточно анализировать дополнительные корни полинома знаменателя, которые возникли в процессе конвейеризации и которые являются корнями характеристического уравнения конвейеризирующего фильтра (6) $p_3, \dots, p_{d+1}, p_{d+2}$.

Анализировать модули дополнительных корней можно с помощью следующего алгоритма:

- 1° Ввести корни анализируемого фильтра p_1 и p_2 и уровень конвейеризации d ;
- 2° Получить значения $a_1 = -p_1 - p_2$ и $a_2 = p_1 \cdot p_2$;
- 3° Получить значения A_1, \dots, A_d полинома знаменателя конвейеризирующего фильтра по формулам (4);
- 4° Сформировать полином $1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}$;
- 5° Получить значения корней $p_3, \dots, p_{d+1}, p_{d+2}$;
- 6° Если полученные корни удовлетворяют условию $|p_i| < 1$ для $i = 1, \dots, d + 2$, то конвейеризованный фильтр является устойчивым.

7° Если условие пункта 6° не выполняется, то необходимо либо воспользоваться методикой обеспечения устойчивости конвейеризованных фильтров, приведенной в (3), либо увеличить значение d .

Анализируя различные пары корней p_1 и p_2 исходных фильтров второго порядка, можно определить такие области их расположения, что фильтры с уровнем конвейеризации d будут устойчивыми. Особенно большой интерес вызывает определение области расположения корней p_1 и p_2 , для которой любой уровень конвейеризации не приводит к потере устойчивости исходных фильтров.

Построить такие области можно с помощью MatLab программы, написанной на базе приведенного алгоритма. Результат такого моделирования показан на рис.3.

Области устойчивости обладают симметрией относительно действительной и комплексной осей, поэтому на рисунке с целью экономии места показан только первый квадрант комплексной Z -плоскости. Там же показана часть единичной окружности.

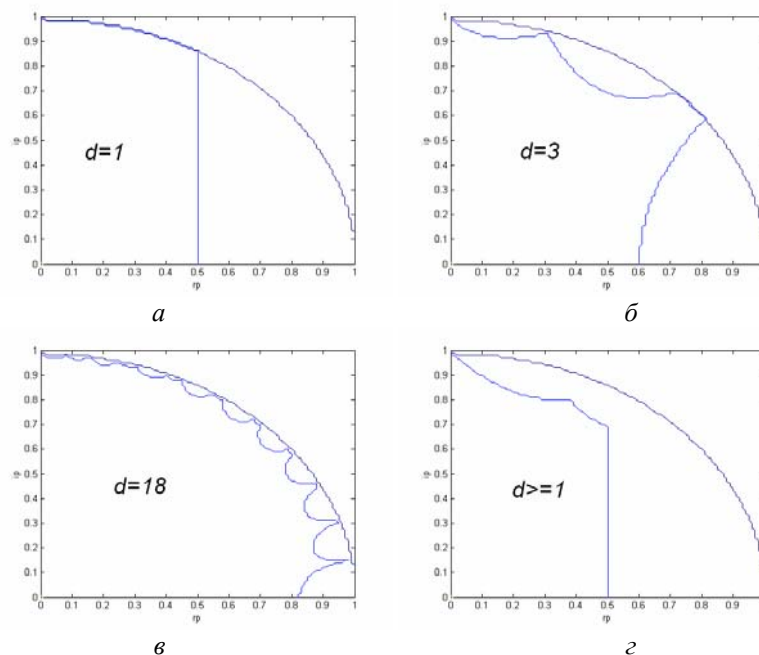


Рис. 3. Области расположения корней устойчивых фильтров второго порядка не теряющих устойчивости при $d = 1$, а; $d = 3$, б; $d = 18$, в и фильтров устойчивых при любом уровне конвейеризации g .

На рис. 3,а показана область расположения корней фильтров второго порядка, не теряющих устойчивости при уровне конвейеризации $d = 1$; на рис. 3,б – при $d = 3$; на рис. 3,в – при $d = 18$. На рис. 3,г показана область расположения корней фильтров второго порядка, устойчивых при любом уровне конвейеризации. Из приведенного рисунка становится ясно, что с увеличением уровня конвейеризации d область устойчивого расположения корней p_1 и p_2 исходного фильтра расширяется. Это позволяет сделать вывод о том, что, меняя уровень конвейеризации фильтров второго порядка, можно в известной мере влиять на их устойчивость.

Обладая информацией об изменении области устойчивости фильтров второго порядка для различных уровней конвейеризации, можно ставить вопрос о разработке адаптивных рекурсивных фильтров с гарантированной устойчивостью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пархи К.К. // ТИИЭР. 1987. Т. 77. №12. С. 96–114.
2. Сергиенко А.М. VHDL для проектирования вычислительных устройств. – Киев: Изд-во “ЧП «Корнейчук», ООО «ТИД «ДС»», 2003. – 208 с.
3. Левин И.И., Семерников Е.А. Устойчивость конвейерных рекурсивных фильтров. Вестник Южного научного центра Российской академии наук, 2005. – Т.1, вып. 2. – С. 28-40.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1987. – 848 с.

5. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. –М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
6. Бессекерский В.А. Цифровые автоматические системы. –М.: Наука, 1976. – 576 с.

УДК 681.3.04

В.В. Котенко, С.В. Котенко

**ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ ПРИ КОДИРОВАНИИ ДЛЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ КАНАЛОВ**

Непрерывным каналом, является канал с непрерывными параметрами, вход \tilde{X} и выход \tilde{Y} которого представляются непрерывными ансамблями. Выборочные пространства этих ансамблей определяются случайными процессами и в некоторых случаях могут рассматриваться как случайные величины. На основании этого описание непрерывных каналов обычно производится в два этапа. На первом этапе рассматривается случай дискретного времени, когда передается последовательность непрерывных случайных величин, которые считаются имеющими одинаковое распределение и независимыми. Таким образом, при вычислении пропускной способности C достаточно ограничиться какой-либо одной из этих величин. На втором этапе рассматривается случай передачи реализаций непрерывных случайных процессов и определяется пропускная способность в единицу времени $C_1 = F_1 C$, где $F_1 = 1/T_1$.

Предположим, что шум в канале является гауссовским, имеет нулевое среднее и дисперсию σ_n^2 , а его взаимодействие с входом канала сводится к тому, что они, будучи взаимонезависимыми, просто складываются. Таким образом, на выходе канала наблюдается величина

$$y_1 = x_1 + n.$$

Для вычисления средней взаимной информации $I(X; Y)$, принимая во внимание ее симметричность относительно X и Y , воспользуемся формулой

$$I[\tilde{X}; \tilde{Y}] = h[\tilde{Y}] - h[\tilde{Y}/\tilde{X}] \tag{1}$$

где \tilde{X} и \tilde{Y} – непрерывные ансамбли на входе и выходе канала с непрерывными параметрами, соответственно; $h[\tilde{Y}]$ – дифференциальная энтропия ансамбля на выходе канала.

Условная энтропия $h[\tilde{Y}/\tilde{X}]$ может быть определена как

$$h[\tilde{Y}/\tilde{X}] = - \int P(x_1) \int P(y_1/x_1) dy_1 dx_1. \tag{2}$$