5. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов. Справочник. –М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
6. *Бессекерский В.А.* Цифровые автоматические системы. –М.: Наука, 1976. – 576 с.

УДК 681.3.04

В.В. Котенко, С.В. Котенко

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ ПРИ КОДИРОВАНИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КАНАЛОВ

Непрерывным каналом, является канал с непрерывными параметрами, вход $\tilde{X}$ и выход $\tilde{Y}$ которого представляются непрерывными ансамблями. Выборочные пространства этих ансамблей определяются случайными процессами и в некоторых случаях могут рассматриваться как случайные величины. На основании этого описание непрерывных каналов обычно производится в два этапа. На первом этапе рассматривается случай дискретного времени, когда передается последовательность непрерывных случайных величин, которые считаются имеющими одинаковое распределение и независимыми. Таким образом, при вычислении пропускной способности *C* достаточно ограничиться какой-либо одной из этих величин. На втором этапе рассматривается случай передачи реализаций непрерывных случайных процессов и определяется пропускная способность в единицу времени $C_1 = F_1 C$, где $F_1 = 1/T_1$.

Предположим, что шум в канале является гауссовским, имеет нулевое среднее и дисперсию σ_n^2, а его взаимодействие с входом канала сводится к тому, что они, будучи взаимонезависимыми, просто складываются. Таким образом, на выходе канала наблюдается величина

$$y_1 = x_1 + n.$$

Для вычисления средней взаимной информации I(X; Y), принимая во внимание ее симметричность относительно X и Y, воспользуемся формулой

$$\mathrm{I}\left[\tilde{X};\tilde{Y}\right] = \mathrm{h}\left[\tilde{Y}\right] - \mathrm{h}\left[\tilde{Y}/\tilde{X}\right] \tag{1}$$

где $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ – непрерывные ансамбли на входе и выходе канала с непрерывными параметрами, соответственно; $\mathrm{h}\left[\tilde{Y}\right]$ – дифференциальная энтропия ансамбля на выходе канала.

Условная энтропия $\mathrm{h}\left[\tilde{Y}/\tilde{X}\right]$ может быть определена как

$$\mathrm{h}\left[\tilde{Y}/\tilde{X}\right] = -\int P\left(x_1\right)\int P\left(y_1/x_1\right)dy_1 dx_1. \tag{2}$$

При независимом сложении входа канала и шума то или иное значение y_1 (при известном x_1), формируется только тогда, когда шум принимает значение $n = y_1 - x_1$.

Поэтому условная вероятность $P(y_1/x_1)dy_1$ того, что *y* (при фиксированном *x*) примет значение из интервала $[y_1;\ y_1 + dy_1]$, совпадет с безусловной вероятностью $P(n)dn$ того, что значения шума будут заключены в интервале $[n;\ n + dn]$, где $n = y_1 - x_1$, а $dn = dy_1$. Тогда из (2) следует

$$\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{Y}}/\tilde{\mathrm{X}}\right] = \mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{N}}\right] = \int P(n)\log P(n)dn,$$

т. е. условная энтропия $\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{Y}}/\tilde{\mathrm{X}}\right]$ совпадает с безусловной энтропией шума $\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{N}}\right]$.

Таким образом, второе слагаемое в формуле (1) определяется только шумом, и для того, чтобы найти пропускную способность, достаточно максимизировать по всем возможным распределениям слагаемое $\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{Y}}\right]$. Как уже было установлено энтропия $\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{Y}}\right]$ будет максимальной, когда *y* имеет гауссовскую плотность вероятности с нулевым средним. Отсюда следует, что сообщение *x*, которое может рассматриваться в виде суммы двух гауссовских случайных величин y_1 и $(-n)$ с нулевыми средними, тоже должно иметь гауссово распределение с нулевым средним. Поскольку вход канала и шум независимы, то $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$, откуда $\mathrm{h}_{\max}[\mathrm{Y}] = \frac{1}{2}\ln 2\pi e\left(\sigma_x^2 + \sigma_n^2\right)$. Кроме того, $\mathrm{h}\left[\tilde{\mathrm{N}}\right] = \frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma_n^2$. Следовательно,

$$C = \mathrm{h}_{\max}\left[\tilde{\mathrm{Y}}\right] - \mathrm{h}\left[\tilde{N}\right] = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right) \qquad (3)$$

Таким образом, пропускная способность достигается, когда вход канала имеет гауссовское распределение с нулевым средним. Это согласуется с физическими объяснениями, которые приведены ранее.

Определим физический смысл полученного результата. Для этого обратимся к материальной форме представления сообщений, т. е. к сигналам. Можно показать, что при заданной пропускной способности *C* канала существует конечное число $M < 2^{C_1T_1}$ реализаций сигнала установленной длительности T_1 которое может быть передано по каналу при исчезающе малой вероятности их опознавания. Причем безошибочная передача большего, чем $2^{C_1T_1}$, числа различных значений случайной величины невозможна. Введение конечного числа реализаций сигнала означает квантование случайной величины, определяющей выборочное пространство ансамбля $\tilde{\mathrm{X}}$. Однако, прибегая к квантованию непрерывном случайной величины со все убывающим шагом, нельзя одновременно добиться того, чтобы все уровни передавались безошибочно, поскольку должно выполняться ограничение $M < 2^{C_1T_1}$. Выбирая же число уровней квантования конечным, меньшим $2^{C_1T_1}$, неизбежно вводим в передаваемые сообщения ошибку квантования. Таким образом, неискаженная передача аналоговых величин по каналу с помехами невозможна.

По порядку возникающая ошибка будет равна $\frac{\sigma_x}{M} = \sigma 2^{-C_1 T_1}$, т. е. $\sigma_x 2^{-C_1}$. Таким образом, можно считать обоснованной следующую теорему.

Теорема. Пусть вход канала является случайной величиной с дисперсией σ_x^2 и пусть производится блоковая передача независимых значений этой случайной величины. Тогда при достаточной длительности блоков T_1 и пропускной способности канала C возможна передача значений случайной величины со среднеквадратической ошибкой, сколь угодно мало отличающейся от $\sigma_x 2^{-C_1}$.

Данная теорема и выражение (3), связывающее пропускную способность с отношением сигнал/шум в канале, позволяет в новом свете взглянуть на проблему передачи в нем дискретных сообщений. Поскольку логарифм любого числа, большего единицы, является положительной величиной из формулы (3) следует, что безошибочная передача дискретных сообщений по каналу связи с помехами возможна при любом, а не только достаточно большом отношении сигнала к шуму. Отношение сигнал/шум влияет только на скорость, а не на сам факт передачи информации.

Этот фундаментальный результат впервые получен К. Шенноном, которому и принадлежит формула (3).

Определим пропускную способность каналов, по которым передаются реализации непрерывных случайных процессов. Для этого примем следующие предположения:

- непрерывный канал имеет ограниченную полосу F.
- шум в канале является гауссовским с нулевым средним и имеет равномерную в полосе F энергетическую спектральную плотность N_0.
- шум не зависит от входа канала и взаимодействует с ним аддитивным образом.

Вход канала в данном случае представляется реализациями стационарного случайного процесса, средняя мощность которого равна σ_x^2.

Существует доказательство того, что при независимости от входа канала наибольшим искажающим воздействием при заданной мощности (в данном случае она равна $N_0 F$) обладает гауссовский шум с равномерным спектром.

По известной теореме дискретизации В.А. Котельникова процесс, спектр которого ограничен полосой F, однозначно характеризуется совокупностью отсчетов, взятых через интервалы времени длиной $1/F$. Содержащаяся в них информация примет наибольшее значение, когда каждый из них будет иметь гауссовское распределение с нулевым средним, и все они будут взаимонезависимыми.

С учетом этого можно прийти к заключению, что процесс $x(t)$ на входе канала должен быть гауссовским и иметь нулевое математическое ожидание.

Теперь покажем, что отсчеты процесса $y(t)$ будут независимыми, когда спектр сигнала $x(t)$ равномерен в полосе F. В самом деле, поскольку сигнал и шум независимы, то спектр их суммы. Таким образом, спектр процесса $y(t)$ равен сумме спектров входа канала и помехи. Следовательно, он тоже будет равномерным в полосе F. Его функция корреляции определяется выражением

$$k_y(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau},$$

которое показывает, что отсчеты процесса, взятые через интервалы времени $1/2F$, некоррелированы и, поскольку речь идет о гауссовском процессе, независимы. Таким образом, рассматривая сообщения достаточно большой длительности T, можно считать, что каждое из них характеризуется $2FT$ независимыми отсчетами.

Отсюда, вычисляя информацию процесса, как информацию его независимых отсчетов, и учитывая формулу (3), получим

$$\overline{\mathrm{I}}_{\Sigma}\left(\tilde{\mathrm{X}};\tilde{\mathrm{Y}}\right) = FT\log\left(\frac{\sigma_x^2+\sigma_n^2}{\sigma_n^2}\right).$$

Черта над $\overline{\mathrm{I}}_{\Sigma}\left(\tilde{\mathrm{X}};\tilde{\mathrm{Y}}\right)$ указывает на то, что речь идет о наибольшем возможном количестве информации.

Соответственно для пропускной способности непрерывного канала в единицу времени имеем

$$C_1 = \frac{\overline{\mathrm{I}}\left[\tilde{\mathrm{X}};\tilde{\mathrm{Y}}\right]}{T} = F\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right). \quad (4)$$

Формула (4) выведена К. Шенноном и носит его имя. Из нее следует что, наибольшее количество информации, которое можно передать по непрерывному каналу с.помехами, растет с увеличением отношения сигнала к шуму, времени передачи T и расширением полосы занимаемых частот F. Последнее означает, что недостаток мощности входа канала можно скомпенсировать надлежащим расширением полосы канала. Системы передачи, в которых спектр входа канала X значительно превосходит по своей ширине спектр сообщения, принято называть ***широкополосным***. Хорошим практическим способом формирования широкополосных сигналов является использование частотной модуляции с достаточно большим индексом.

Следует, однако, заметить, что возможности увеличения пропускной способности, связанные с расширением полосы, небезграничны. Дело в том, что у шума ограничивается обычно не мощность, как таковая, а спектральная интенсивность N_0. С учетом этого, преобразовав выражение (4) к виду

$$C_1 = F\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{N_0 F}\right),$$

можно сделать вывод, что в указанных условиях пропускная способность канала с ростом F будет стремиться к некоторому пределу. Действительно, с ростом полосы F величина $\frac{\sigma^2}{N_0 F}$ уменьшается. Тогда, учитывая, что при малых x

имеет место соотношение $\ln(1+x) \approx x$ (можно также воспользоваться правилом Лопиталя), получим

$$C_{1\infty} = \frac{\sigma^2}{N_0}\left[\frac{\text{нат}}{\text{с}}\right]. \tag{5}$$

Общий вид зависимости пропускной способности от полосы F показан на рис. 1. Из нее следует, что при заданных значениях мощности сигнала σ^2 и спектральной интенсивности шума N_0 получить пропускную способность канала связи большую, чем $C_{1\infty}$, нельзя.

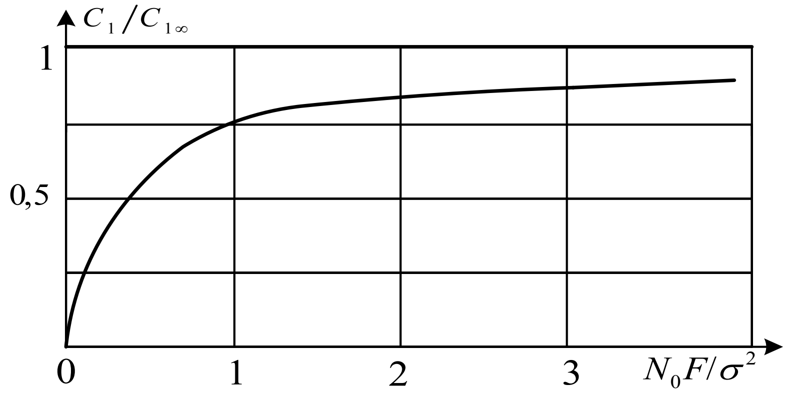

Рис. 1. Пропускная способность непрерывного канала, как функция его полосы

Пусть $C_{1\infty} = 1$ нат/с. Как следует из формулы (5), для обеспечения такой пропускной способности необходимо иметь источник сигнала, мощность которого в месте его сложения **с** шумом численно равна N_0 Вт (как обычно, речь идет о мощности, рассеиваемой в сопротивлении 1 Ом). Так как передача одного ната информации длится в таком канале 1 с, то при этом расходуется энергия, численно равная N_0 джоулей.

В качестве критерия эффективности корректирующих кодов при кодировании для непрерывных каналов можно использовать обеспечиваемую ими достоверность передачи информации при фиксированных скорости передачи, средней мощности сигнала и помехах.

Для этого необходимо прежде всего ввести меру достоверности передачи информации, обеспечивающую возможность сравнения по этой характеристике различных кодов. Для блочных корректирующих кодов в качестве такой меры удобно использовать предложенную Л.М. Финком ***эквивалентную вероятность ошибки*** $\text{P}_{\text{э}L}$, характеризующуюся значением вероятности ошибочного приёма элементарного символа примитивного кода (*L, L*) при котором последний обеспечивает ту же достоверность передачи информации, что и рассматриваемый блочный корректирующий код (*N, L*). Поскольку для примитивного кода вероятность ошибочного приема символа при случайных независимых искажениях отдельных символов однозначно характеризует достоверность передачи информации, то величина $\text{P}_{эL}$ является однозначной характеристикой достоверности корректирующего кода, т. е. $\text{P}_{эL} = \text{P}_э$.

Если оцениваемый код (*N, L*) в рассматриваемом канале характеризовать вероятностью ошибочного приема P_L, то вероятность $\text{P}_{эL}$ ошибочного приема символа, при которой обеспечивается та же достоверность передачи информации для примитивного кода (*L, L*), определяется из равенства $(1-\text{P}_{эL})^L = 1-\text{P}_L$.Откуда $\text{P}_{эL} = 1-(1-\text{P}_L)^{1/L}$ и при $\text{P}_L << 1$ имеем

$\text{P}_{эL} \approx \text{P}_L / L$.

Если корректирующий код (*N, L*) имеет кодовое расстояние $d_{\min}$, т. е. способен достоверно исправить $l = (d_{\min}-1)/2$ ошибок, то при случайных независимых искажениях его символов, характеризуемых вероятностью P_e, получим

$$\text{P}_L = \sum_{i=l+1}^{N} C_N^i \text{P}_e^i (1-\text{P}_e)^{N-i},$$

$$\text{P}_{эL} = 1-(1-\text{P}_L)^{1/L} = 1-[1-\sum_{i=l+1}^{N} C_N^i \text{P}_e^i (1-\text{P}_e)^{N-i}]^{1/L}. \tag{6}$$

В случае, когда $\text{P}_e << 1$ и $\text{P}_L = \sum_{i=l+1}^{N} C_N^i \text{P}_e^i (1-\text{P}_e)^{N-i} << 1$, сохраняя в (6) лишь первый член суммы, имеющий наименьший (*l*+1)-й порядок относительно малой величины P_e, получаем:

$$\text{P}_э \approx \frac{\text{P}_L}{L} \approx \frac{C_N^{l+1} \text{P}_e^{l+1} (1-\text{P}_e)^{N-l-1}}{L} \approx \frac{C_N^{l+1} \text{P}_e^{l+1}}{L}.$$

Для сравнения двух кодов (N_i, L_i) и (N_j, L_j) можно воспользоваться отношением

$$\eta_{j/i} = \frac{\text{P}_{эi}}{\text{P}_{эj}} = \frac{L_j C_{N_i}^{l_i+1} \text{P}_{ei}^{l_i+1}}{L_i C_{Nj}^{l_j+1} \text{P}_{ej}^{l_j+1}}, \tag{7}$$

где $\eta_{j/i}$ — коэффициент, характеризующий выигрыш *j*-го кода по отношению к *i*-му; l_i и l_j — число достоверно исправляемых ошибок, соответствующее кодовым расстояниям сравниваемых кодов $d_{\min i}$ и $d_{\min j}$; P_{ei} и P_{ej} — вероятности искажений элементарных символов сравниваемых кодов при одинаковых значениях скорости передачи информации, средней мощности канала и характеристиках помех.

Если в качестве *i*-го кода используется примитивный код, то коэффициент (7) определяется как коэффициент эффективности помехоустойчивого кода $\eta_{ПК}$:

$$\eta_{ПК} = \frac{P_{эпр}}{P_{эпк}} \approx \frac{L_j P_{eпр}}{C_N^{l+1} P_{eпк}^{l+1}}. \tag{8}$$

где $P_{eпк}$ — вероятность ошибочного приема символа корректирующего кода; $P_{eпр}$ — вероятность ошибочного приема символа соответствующего примитивного кода при тех же помехах и тех же значениях скорости передачи информации и средней мощности канала.

Представим помеху в непрерывном канале в виде аддитивного белого шума со спектральной плотностью N_0. Скорость передачи информации $\upsilon_{пи}$ зафиксируем числом *m* информационных символов, передаваемых в 1 с (исходный информационный код считается безызбыточным). Энергию обоих символов двоичного кода (0 и 1) принимаем одинаковой. Исходя из этого вероятности трансформации символов могут быть определены как

$$P_{01} = P_{10} = \Phi\left(-\sqrt{\lambda E / N_0}\right).$$

Тогда, используя эту формулу, получаем:

$$P_{ej} = \Phi\left(-\sqrt{\lambda E_j / N_0}\right) = \Phi\left(-\sqrt{\lambda P_{ск} / (N_0 m N_j / L_j}\right) \tag{9}$$

где $P_{ск}$ — фиксируемая средняя мощность канала; mN_j / L_j — общее число символов, передаваемых за 1 с при применении кода (N_j, L_j), отвечающее условию передачи *m* информационных символов в 1 с;

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ — интеграл вероятностей;

$\lambda = 1 - \frac{1}{E} \int\limits_0^T u_1(t) u_0(t) dt$ — коэффициент различимости символов.

С учетом (9) выражение (8) приводится к виду:

$$\eta_{ПК} = \frac{\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda E_c}{N_0 R}}\right)}{\frac{C_N^{l+1}}{L}\left[\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda E_c}{N_0}}\right)\right]^{l+1}}, \tag{10}$$

где E_c — энергия символа помехоустойчивого кода (*N,L*); $E_c N / L$ — энергия символа примитивного кода при тех же значениях скорости передачи информации и средней мощности сигнала; $R = L / N$ — скорость кодирования.

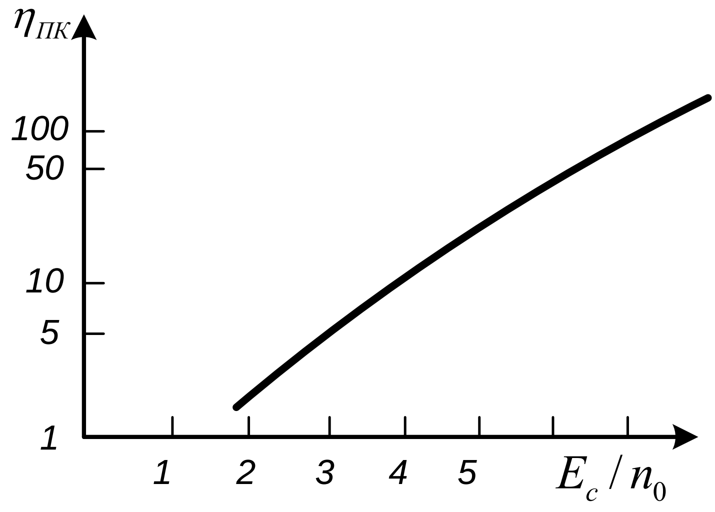

Рис.2. График зависимости коэффициента эффективности $\eta_{ПК}$ *от отношения* E_c / N_0

В качестве примера на рис. 2 приведен график зависимости коэффициента эффективности $\eta_{ПК}$ от отношения E_c / N_0 для 15-разрядного кода Хэмминга, исправляющего одиночные ошибки ($N = 15, L = 11, l = 1$). График получен для $\lambda = 2$ в области достаточно больших значений E_c / N_0, когда применима приближенная формула (10).

Из графика следует практически важный ***вывод***: при низкой достоверности приема символов (малых значениях E_o/N_0) повышение корректирующей способности кода может привести к отрицательным результатам, так как при этом превалирующим может оказаться увеличение вероятности ошибочного приема символов из-за снижения их энергии при увеличении избыточности.

УДК 378.1

В.В. Котенко, К.Е. Румянцев

НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Постоянно возрастающее значение информационной составляющей в жизнедеятельности человечества выдвигает на первый план проблему объективной оценки эффективности образовательных систем. К основным составляющим этой проблемы в настоящее время относятся:

– значительная неоднозначность современной системы взглядов на само - обучение и его взаимосвязь с такими понятиями, как творчество и познание, следствием чего является преимущественно субъективный подход к оценке качества обучения и эффективности образовательного процесса,