Как показали исследования, разработанный метод позволяет достаточно легко синтезировать закон управления для широкого класса нелинейных дискретных систем, что особенно важно, так как в области энергетики большинство систем являются нелинейными, а управление в основном осуществляется с помощью цифровой вычислительной техники.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *Красовского А.А.* – М.: Наука, 1987.
2. *Подчукаев В.А.* Аналитические методы теории автоматического управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. *Гайдук А.Р., Василенко С.В.* Приведение нелинейных дискретных систем к форме Крылова – Луенбергера. Известия ТРТУ. Тематический выпуск «Актуальные проблемы производства и потребления электроэнергии». ─ Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. №11(55). ─ С.5-11.
4. *Краснощёченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. ─ М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.

УДК 621.31.002.5

М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ ПО ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА

Введение. Начавшееся в 2005 г. создание *системы мониторинга переходных режимов* (СМПР) – *Wide Area Measurement System* (WAMS) в энергообъединении стран СНГ и Балтии (ЕЭС/ОЭС) продиктовано объективной необходимостью Системного оператора Единой энергосистемы в источнике информации, позволяющем сформировать точное представление о динамическом поведении энергосистемы при технологических нарушениях и авариях [0]. Технология векторного измерения параметров на основе *синхрофазоров – Phasor Measurement Units* (PMU) позволяет эффективно дополнить существующую в ЕЭС/ОЭС распределенную систему измерений (SCADA). Появление такой технологии предоставляет возможность устранить недостаток информации о протекании электромеханических переходных процессов, которая очень важна для адекватного анализа динамических свойств энергосистемы. Поэтому при создании первой очереди СМПР задачи верификации динамической модели ЕЭС/ОЭС, идентификации математической модели ЕЭС/ОЭС и мониторинга низкочастотных колебаний в ЕЭС/ОЭС стоят на первом месте при изучении динамики энергообъединения [2, 3].

Таким образом, на сегодняшний день актуальной является научно-техническая задача: по данным СМПР сделать вывод о функционировании энергосистемы в соответствии с ее математической моделью, т.е. идентифицировать модель с реально существующей (функционирующей) системой.

В наиболее широкой постановке проблемы идентификации предполагается наличие случайных факторов, при которых точные измерения невозможны. В более простой постановке идентификация энергосистемы сводится к определению элементов матриц A и B в уравнении динамики:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

по данным измерений компонент вектора состояний $x(t) \in \mathrm{R}^n$. Здесь $u(t) \in \mathrm{R}^r$ обозначает вектор входных величин (сигналов) системы, x_0 – начальные условия.

Практически такая же простая постановка задачи предполагает использование вычислительной техники, работающей с дискретными величинами. Поэтому вместо дифференциального уравнения (1) можно использовать эквивалентное рекурсивное соотношение

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k ,= \qquad k \quad \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

или систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = A\,x_0 + Bu_0, \\ x_2 = A\,x_1 + Bu_1, \\ \qquad \vdots \\ x_N = A\,x_{N-1} + Bu_{N-1}, \end{cases} \tag{3}$$

где N – количество шагов (циклов) измерений.

Каждое уравнение системы (3) равносильно n скалярным равенствам. Таким образом, для определения $n^2 + nr$ коэффициентов матриц A и B мы имеем $N \times n$ уравнений.

Если в (2) положить $u_k = 0$, то, записывая систему (3) в виде равенства строк с векторными компонентами, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}$$

или с учетом очевидных подстановок равенства

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{N-2}x_0 & A^{N-1}x_0 \end{pmatrix},$$

можно убедиться (см., например, [4, 5]) в том, что для идентифицируемости системы (определения матрицы A) при $N = n$ достаточно, чтобы матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{n-2}x_0 & A^{n-1}x_0 \end{pmatrix}$$

были невырожденными, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

или

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{n-2}x_0 & A^{n-1}x_0 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Однако этот частный случай редко встречается в практических задачах, и более общая ситуация приводит к необходимости решения уравнений вида

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} + \\ + B\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad N \neq n. \end{gathered} \tag{6}$$

В данной работе исследуется задача идентификации дискретной линейной математической модели энергосистемы (2), как задача определения условий ее разрешимости, формулировки *критерия идентифицируемости* и построения формулы решения (*алгоритма идентификации*) алгебраического уравнения (6). Притом, неизвестными считаются матрицы *A* и *B*.

В основу полученных результатов положен оригинальный *матричный метод канонизации*, разработанный авторами.

Методические основания. Рассмотрим матричное уравнение вида

$$XZ + YQ = C\,, \tag{7}$$

где Z, Q, C – заданные в общем случае над полем комплексных чисел матрицы, а X, Y – искомые матрицы. Условно данное уравнение можно именовать *правосторонним* уравнением.

Рассмотрим процедуру получения решения (7) на основе матричного метода канонизации [6, 7].

Метод канонизации оперирует понятиями так называемых матричных канонизаторов и делителей нуля. Напомним, что (*левым* $A_L^{\perp}$ и *правым* $A_R^{\perp}$) *делителями нуля* максимального ранга и (*левым* A_L^{+} и *правым* A_R^{+}) *канонизаторами* некоторой матрицы A размера $m \times n$ и ранга r называются такие матрицы, которые удовлетворяют блочному матричному тождеству

$$\begin{pmatrix} A_L^{+} \\ A_L^{\perp} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} A_R^{+} & A_R^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Сводным канонизатором называют матрицу (псевдообратную матрицу), получаемую из левого и правого канонизаторов по формуле

$$A^{+} = A_R^{+} A_L^{+}\,,$$

и, как доказано в [7], удовлетворяющую условиям регулярности по Нейману

$$AA^{+}A = A, \quad A^{+}AA^{+} = A^{+}\,.$$

Формулы решения левосторонних и правосторонних линейных матричных уравнений методом канонизации представлены в таблице 1, где матрицы μ, η имеют подходящие размеры и произвольные элементы.

Таблица 1

Метод канонизации

Вид уравнения		Условие разрешимости уравнения	Формульное представление решения
Название	Формула		
Левостороннее	$AX = C$	$A_L^{\perp}C = 0$	$X = A^{+}C + A_R^{\perp}\mu$
Правостороннее	$XB = C$	$CB_R^{\perp} = 0$	$X = CB^{+} + \eta B_L^{\perp}$

Заметим, что изучаемое уравнение (6) с точностью до обозначений имеет вид именно правостороннего уравнения (7).

Перепишем (7) в эквивалентном виде

$$XZ = C - YQ \tag{9}$$

и рассмотрим его как уравнение относительно неизвестной матрицы X. В соответствии с таблицей это уравнение разрешимо, если выполняется условие

$$\left(C - YQ\right)Z_R^{\perp} = 0\,. \tag{10}$$

Это условие можно рассматривать как ограничение на выбор неизвестной Y. Действительно, запишем (10) в виде правостороннего уравнения, но теперь уже относительно матрицы Y:

$$YQZ_R^{\perp} = CZ_R^{\perp}. \tag{11}$$

Это уравнение оказывается разрешимым, если выполняется тождество

$$CZ_R^{\perp}\left(QZ_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\left(QZ_R^{\perp}\right)_R^{\perp}$ – правый делитель нуля произведения матриц $QZ_R^{\perp}$.

При выполнении условия (12) множество решений уравнения (11) имеет вид

$$Y = CZ_R^{\perp}\left(QZ_R^{\perp}\right)^{+} + \mu\left(QZ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}. \tag{13}$$

Здесь символы $\left(QZ_R^{\perp}\right)^{+}$, $\left(QZ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}$ обозначают соответственно сводный канонизатор (псевдообратную матрицу) и левый делитель нуля произведения матриц $QZ_R^{\perp}$.

Подставляя далее решение (13) в соотношение (9), получаем уравнение

$$XZ = C - \left(CZ_R^{\perp}\left(QZ_R^{\perp}\right)^{+} + \mu\left(QZ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\right)Q, \tag{14}$$

которое всегда оказывается разрешимым относительно матрицы X, поскольку выполнены условия выбора (11) – (12). При этом формула его решения имеет вид

$$\begin{aligned} X &= \left[C - \left(CZ_R^{\perp}\left(QZ_R^{\perp}\right)^{+} + \mu\left(QZ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\right)Q\right]Z^{+} + \chi Z_L^{\perp} = \\ &= C\left(E - Z_R^{\perp}\left(QZ_R^{\perp}\right)^{+}Q\right)Z^{+} - \mu\left(QZ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}QZ^{+} + \chi Z_L^{\perp}, \end{aligned} \tag{15}$$

где E – единичная матрица подходящего размера.

Повторяя аналогичные операции в отношении уравнения (7), записанного в виде

$$YQ = C - XZ,$$

можно получить эквивалентное (12) условие разрешимости

$$CQ_R^{\perp}\left(ZQ_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0 \tag{16}$$

и эквивалентные (13) и (15) формулы решения

$$\left.\begin{aligned} X &= CQ_R^{\perp}\left(ZQ_R^{\perp}\right)^{+} + \eta\left(ZQ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}, \\ Y &= C\left(E - Q_R^{\perp}\left(ZQ_R^{\perp}\right)^{+}Z\right)Q^{+} - \eta\left(ZQ_R^{\perp}\right)_L^{\perp}ZQ^{+} + \chi Q_L^{\perp}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Заметим, что аналогичные результаты могут быть получены при рассмотрении уравнения (7) в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix} = C,$$

с использованием метода блочного решения алгебраических задач [7], в котором при решении уравнений общего вида фактически рассматривается канонизация блочной матрицы. Очевидно, что различные формы конечных решений (13), (15), (17) определяются неединственностью тройки матриц

$$\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}_L^{\perp}, \begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}_R^{\perp}, \begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}^{+}.$$

Теперь обратимся к задаче идентификации в смысле разрешения уравнения (6) относительно матриц A и B.

Формулировка подхода к идентификации и метод идентификации. Предположим, что наблюдения за системой (2) ведутся на протяжении N шагов [8]. С целью компактности записываемых формул введем обозначения для известных по постановке задачи матриц:

$$\begin{aligned} X_{N-1} &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix}, \\ X_N &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{N-2} & u_{N-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

и перепишем уравнение (6) с учетом (18) в виде

$$X_N = AX_{N-1} + BU. \tag{19}$$

Условие разрешимости уравнения (19) относительно неизвестных матриц A и B согласно (12) и (16) можно сформулировать в эквивалентных формах:

$$X_N \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0, \tag{20}$$

$$X_N U_R^{\perp} \left(X_{N-1} U_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0. \tag{21}$$

Другими словами, уравнение (6) является совместным, а система (2) – идентифицируемой, если и только если известные матрицы (18) удовлетворяют эквивалентным алгебраическим соотношениям (20), (21).

Далее, если условия (20), (21) выполняются, то формулы решения (*алгоритм идентификации* по дискретным данным) в соответствии с (13), (15), (17) имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= X_N \left(E - \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp} U \right) X_N^{+} - \\ &\quad - \mu \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp} U X_{N-1}^{+} + \chi \left(X_{N-1}\right)_L^{\perp}, \\ B &= X_N \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp} + \mu \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp} \end{aligned} \tag{22}$$

или

$$\begin{aligned} A &= X_N U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+} + \eta \left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp}, \\ B &= X_N \left(E - U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+} X_{N-1} \right) U^{+} - \eta \left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp} X_{N-1} U^{+} + \varphi U_L^{\perp}. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь μ, χ, η, φ – произвольные матрицы подходящего размера.

Ясно, что однозначность решений (отсутствие произвола в (22) (23)), когда искомые матрицы выражаются формулами:

$$\begin{aligned} A &= X_N \left(E - \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} U \right) X_N^{+}, \\ B &= X_N \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} \left(U \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp} \end{aligned} \tag{24}$$

или

$$\begin{aligned} A &= X_N U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+}, \\ B &= X_N \left(E - U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+} X_{N-1} \right) U^{+}, \end{aligned} \tag{25}$$

достигается, если и только если строго выполняются тождества:

$$\left(X_{N-1}\right)_L^{\perp}=0,\ \left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=0 \tag{26}$$

или

$$U_L^{\perp}=0,\ \left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=0\,. \tag{27}$$

Это и есть алгебраическая форма *критерия идентифицируемости.*

Поясним сделанное утверждение. Согласно (18), (26) и (27) линейная рекурсивная система (2) идентифицируема тогда и только тогда, когда не только матрицы

$$\begin{aligned} X_{N-1}&=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix},\\ U&=\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{28}$$

не имеют линейно зависимых строк (т.е. их левые делители нуля равны нулю), но не имеют линейно зависимых строк и произведения матриц

$$U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}=\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix}_R^{\perp},$$

$$X_{N-1}U_R^{\perp}=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}_R^{\perp}.$$

В указанном выше частном случае (4), (5), когда матрица X_{N-1} (28) имеет квадратный вид $(N=n)$, согласно (26) для идентифицируемости системы (2), действительно, необходимо и достаточно обеспечить невырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix},$$

т.е.

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix}\neq 0\,.$$

Объединение выражений (22), (23), (26) и (27) в силу их эквивалентности позволяет записать формулы решения задачи идентификации в более компактном виде

$$\begin{aligned} A&=X_N U_R^{\perp}\left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+}+\eta\left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp},\\ B&=X_N\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp}+\mu\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp}.\end{aligned} \tag{29}$$

Тогда *критерий идентифицируемости матрицы* A запишется в виде условия

$$\left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=0\,, \tag{30}$$

а *критерий идентифицируемости матрицы* B – условия:

$$\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=0\,. \tag{31}$$

При удовлетворении соответствующих критериев (30), (31) идентифицируемые матрицы A и B определяются выражениями:

$$A=X_N U_R^{\perp}\left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+}, \tag{32}$$

$$B=X_N\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp}. \tag{33}$$

Рассмотрим некоторые характерные примеры решения задачи идентификации на основе полученных соотношений, при этом в силу эквивалентности условий разрешимости задачи идентификации (20), (21) в дальнейшем будем использовать, например, условие (21).

Примеры решения задачи идентификации. Пусть требуется идентифицировать матрицы A и B математической модели энергосистемы, представленой уравнением (2), по дискретным СМПР:

$$X_{N-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \tag{34}$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$X_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \tag{35}$$

Вычислим делители нуля и канонизаторы:

• матрицы X_{N-1}:

$$\left(X_{N-1}\right)_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(X_{N-1}\right)^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{36}$$

• матрицы U:

$$U_L^{\perp} = 0, \quad U_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{37}$$

• произведений матриц:

$$X_N U_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \left(X_N U_R^{\perp}\right)_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(X_N U_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(X_N U_R^{\perp}\right)^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{38}$$

• и матриц:

$$U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp} = 0,$$

$$\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)^{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Подставляя соответствующие матрицы из (35), (37), (38) в условие (21), получаем нулевую результирующую матрицу

$$X_N U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0 .$$

Таким образом, задача идентификации в данном случае является разрешимой.

Из (38) и (39) следует, что критерий идентифицируемости матрицы B (31) выполняется, и сама матрица может быть вычислена по формуле (33):

$$B = X_N \left(X_{N-1} \right)_R^{\perp} \left(U \left(X_{N-1} \right)_R^{\perp} \right)_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

однако критерий идентифицируемости матрицы A (30) не выполняется $\left(\left(X_N U_R^{\perp} \right)_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \right)$, тогда согласно формуле (29) имеем:

$$A = X_N U_R^{\perp} \left(X_N U_R^{\perp} \right)^{+} + \eta \left(X_N U_R^{\perp} \right)_L^{\perp} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1 \\ \eta_2 & \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Действительно, при любых элементах η_1, η_2 пара матриц

$$A = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1 \\ \eta_2 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

при заданных сигналах (34) – (35) обращает уравнение (2) в тождество:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1 \\ \eta_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что числовые последовательности (34) – (35) были получены при моделировании переходной характеристики энергосистемы с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и начальными условиями

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо отметить, что исходная матрица A принадлежит найденному множеству (40).

Усложним задачу. Предположим, что СМПР выдает следующие данные:

$$X_{N-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right), \tag{41}$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right), \tag{42}$$

$$X_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right). \tag{43}$$

Канонизация матриц X_{N-1}, U, $X_{N-1}U_R^{\perp}$ и $U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}$ приводит к равенствам

$$\left(X_{N-1}\right)_L^{\perp}=0,\quad \left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \left(X_{N-1}\right)^{+}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$U_L^{\perp}=0,\quad U_R^{\perp}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad U^{+}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},=$$

$$X_{N-1}U_R^{\perp}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad \left(X_{N-1}U_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\ 0,\quad \left(X_{N-1}U_R^{\perp}\right)_R^{\perp}\ 0,$$

$$\left(X_{N-1}U_R^{\perp}\right)^{+}=\left(X_{N-1}U_R^{\perp}\right)^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & -5 & -1\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix},$$

$$U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad \left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\ 0,\quad \left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)_R^{\perp}\ 0,$$

$$\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)^{+}=\left(U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что в данном случае матрицы $X_{N-1}U_R^{\perp}$ и $U\left(X_{N-1}\right)_R^{\perp}$ имеют нулевые матрицы в качестве левых делителей нуля и, значит, в соответствии с условием разрешимости (21) и критериями идентифицируемости (30), (31), решение задачи идентификации согласно (32), (33) имеет однозначный вид

$$A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ 12 & -3 & 5\\ -4 & 15 & 3\end{pmatrix},\quad B\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 5\\ -9 & 1\\ 3 & -5\end{pmatrix}.$$

Если же вместо последовательности (42) PMU и SCADA выдают, например, следующую матрицу:

$$U=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

то оказывается, что последняя имеет ненулевой левый делитель нуля (линейно зависимые строки):

$$U_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Более того, условие разрешимости (21) при неизменных матрицах (41), (43)

$$X_N U_R^{\perp} \left(X_{N-1} U_R^{\perp} \right)_R^{\perp} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \neq 0$$

не выполняется, что, в свою очередь, означает принципиальную неразрешимость задачи идентификации по имеющимся данным.

Рассмотрим более сложный вариант решения задачи идентификации математической модели энергосистемы.

Задана линейная модель объединенной энергосистемы (ОЭС) Центра. Эта модель описывает схему реальной энергосистемы с сетями 220 – 750 кВ. Она включает в себя восемь концентрированных подсистем и содержит 286 узлов, 531 ветвей, 129 генераторов. Для описания генераторов использовались модели динамических звеньев 2-го порядка. Матрица ***A*** состояния данной ОЭС имеет 258 порядок и является апериодически устойчивой. Значения элементов матрицы ***A*** модели ОЭС Центра приведен на рис. 1. Считается, что СМПР выдает данные о фазных углах и скольжениях роторов всех 129 генераторов.

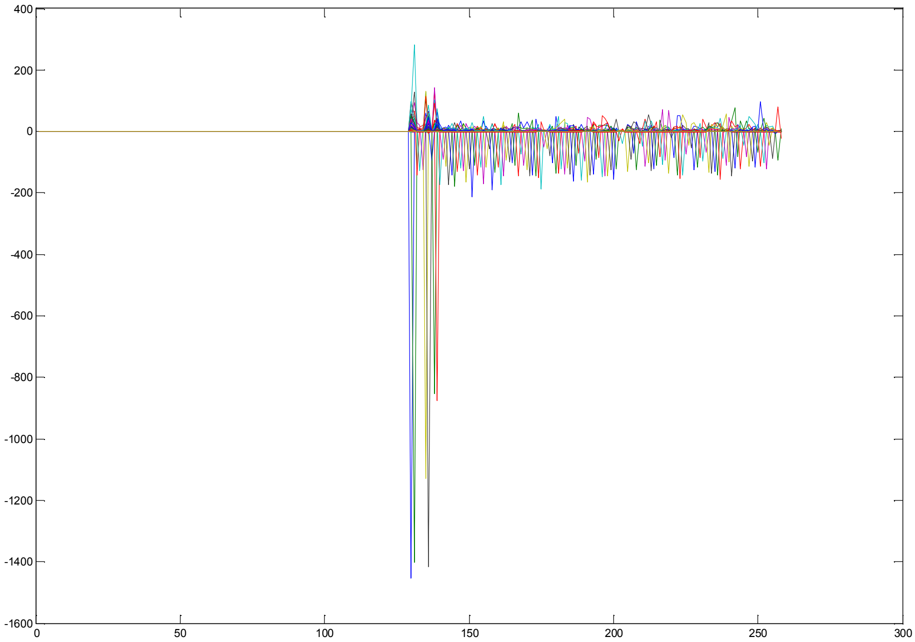

*Рис. 1. Значения элементов матрицы **A** ОЭС Центра*

В результате решения задачи идентификации были получены значения элементов матрицы ***A*** дискретной модели ОЭС Центра. Затем дискретная модель была преобразована к непрерывному виду. Точность идентификации составила ~2,5%.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аюев Б.И.* О системе мониторинга переходных режимов // Энергорынок. 2006. № 2.

2. *Ayuev B., Kulikov Y.* Wide Area Monitoring System of IPS/UPS: application for digital model validation // Third International Conference on Critical Infrastructures. – Alexandria, VA, USA, September 25 – 28, 2006.
3. Алгоритмы прямого цифрового управления установившимися и переходными режимами энергосистемы по данным системы мониторинга переходных режимов. Отчет НИИПТ. 2007. № 171-КТ.
4. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979.
5. Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: *Федосов К.В.* (пред.) и др. Автоматическое управление. Теория. Т. 1 – 4 / *Федосов Е.А., Красовский А.А., Попов Е.П. и др.* / Под общ. ред. *Федосова Е.А.* – М.: Машиностроение, 2000.
6. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* О минимальной параметризации решений линейных матричных уравнений // Вестник ИГЭУ, 2004. Вып. 6. – С. 127 – 131.
7. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ, 2005. Вып. 5. – С. 196 – 240.
8. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* О решении задачи идентификации линейных дискретных систем методом канонизации // Вестник ИГЭУ, 2005. Вып. 5. – С. 192 – 196.