

10. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.* Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.
11. *Кулай А.Ю., Мельников С.Ю.* Сравнение нескольких подходов к распознаванию языков искаженных текстов // Труды второй международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2007), (Обнинск, Россия), 10-14 сентября 2007 г. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. Т. 1. – С. 218-220.
12. *Nadas A., Nahamoo D., Picheny M., Powell J.* An iterative «Flip-Flop» approximation of the most informative split in the construction of decision tree. Proc. of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 1991), (Toronto, Canada), May 1991, pp. 565-568.
13. *Navratil J.* Recent advances in phonotactic language recognition using binary-decision trees. In INTERSPEECH-2006, paper 1338-Mon2CaP.6.

УДК 681.327.8

Д.Ф.Хисамов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА КАНАЛАХ СВЯЗИ С ЗАВИСИМЫМИ ОШИБКАМИ

Постановка задачи

Пусть по каналу с аддитивной помехой передается рекуррентный сигнал (РС) длительностью в N символов. Прием РС осуществляется по “зачетному отрезку” [1]. Определим вероятность правильной синхронизации РС при наличии зависимых ошибок в канале. Рекуррентный сигнал на интервале анализа N можно разбить на блоки из ε элементов, кратных длине “зачетного отрезка” n , то есть

$$\varepsilon = n/J, \quad J=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

где J – параметр, указывающий, на сколько частей разбит “зачетный отрезок”.

Таких блоков на длине N может быть $Z=N \cdot J/n$.

Условимся блок называть непораженным, если все ε элементов блока приняты безошибочно, и пораженным при наличии хотя бы одной ошибки в блоке, и обозначим состояния блоков соответственно через 0 и 1. Тогда блочное отображение принимаемого РС можно представить двоичной последовательностью:

$$\bar{S} = S_1, S_2, \dots, S_Z, \quad (2)$$

где:

$$S_i = \begin{cases} 0 & \text{если блок непоражен,} \\ 1 & \text{если блок поражен,} \end{cases}$$

а вероятности правильного приема РС будет соответствовать вероятность появления в последовательности \bar{S} серии из J нулей подряд.

Допустим, что последовательность \bar{S} аппроксимируется односвязной цепью Маркова [2]. Чем больше длительность блока, тем эта аппроксимация будет точнее, так как при этом уменьшается зависимость между блоками, отстоящими друг

от друга более чем на ε элементов. С другой стороны, при увеличении длины блока уменьшается вероятность правильного приема РС за счет того, что между пораженными блоками может возникнуть “чистый” интервал из n элементов РС, который не может быть учтен данной моделью. То есть данная модель дискретного канала синхронизации всегда будет давать нижнюю границу для вероятности правильного приема РС.



Рис. 1. Расположение «зачетных отрезков» на длине анализа

Таким образом, легко заметить, что существует оптимальная длина блока $\varepsilon_{\text{опт}}$, при которой вероятность правильного приема будет максимальной. Оптимальная длина блока определяется параметром модели J , то есть: $\varepsilon_{\text{опт}} = n/J_{\text{опт}}$. Производя расчеты, при различных J , всегда можно найти $\varepsilon_{\text{опт}}$. В некоторых частных случаях, например, при независимых ошибках в канале, оптимальная длина блока будет известна заранее, то есть она равна одному элементу, соответствующему параметру модели ($J_{\text{опт}} = n$). Тогда, как легко видеть из рис.1, учитываются все зачетные отрезки и, следовательно, получим точное выражение для вероятности $P_{\text{пп}}$. В дальнейших расчетах предполагается, что параметр модели J выбран оптимальным.

Синтез математической модели

Найдем начальные и переходные вероятности цепи Маркова, аппроксимирующей блочное отображение РС. Для цепи (2) начальные вероятности по определению будут равны:

$$P_0 = P\{S_1 = 0\} = P_{\bar{0}0}(\varepsilon); \quad (3)$$

$$P_1 = P\{S_1 = 1\} = 1 - P_0 = \bar{P}_{\bar{0}0}(\varepsilon), \quad (4)$$

где $P_{\bar{0}0}(\varepsilon)$ – вероятность безошибочного приема блока из ε элементов,

$\bar{P}_{\bar{0}0}(\varepsilon)$ – вероятность появления в блоке хотя бы одной ошибки.

Матрица переходных вероятностей для цепи (2) очевидно не может содержать нулевые элементы, в противном случае такая цепь будет описывать два крайних, неинтересных для практики случая, когда в канале помехи отсутствуют вообще или, наоборот, когда все принимаемые блоки из ε символов поражены помехами. Следовательно, цепь (2) является конечной, регулярной и, согласно теореме Кемени [2], однородной. Переходные вероятности простой однородной цепи представляют собой условные вероятности состояний и поэтому легко находятся из формулы умножения зависимых событий как [4]:

$$P_{ij} = P\left\{\frac{S_{\xi+1}}{S_{\xi}}\right\} = \frac{P\{S_{\xi}, S_{\xi+1}\}}{P\{S_{\xi}\}}, \quad (5)$$

где $P\left\{\frac{S_{\xi+1}}{S_{\xi}}\right\}$, – вероятность появления состояния $S_{\xi+1}$, при условии появления состояния S_{ξ} ;

$P\{S_{\xi}, S_{\xi+1}\}$ – вероятность совместного осуществления состояний S_{ξ} и $S_{\xi+1}$;

$P\{S_{\xi}\}$ – безусловная вероятность появления состояния S_{ξ} ;

$i=0,1; j=0,1; \xi=1,2,\dots,z$.

То есть из (5) находим:

$$P_{00} = P\{S_{\xi+1} = 0/S_{\xi} = 0\} = \frac{P_{6d}(2\varepsilon)}{P_{6d}(\varepsilon)}; \quad (6a)$$

$$P_{01} = P\{S_{\xi+1} = 1/S_{\xi} = 0\} = 1 - P_{00}; \quad (6б)$$

$$P_{10} = P\{S_{\xi+1} = 0/S_{\xi} = 1\} = \frac{P_{6d}(\varepsilon) - P_{6d}(2\varepsilon)}{1 - P_{6d}(\varepsilon)}; \quad (6в)$$

$$P_{11} = P\{S_{\xi+1} = 1/S_{\xi} = 1\} = 1 - P_{10}. \quad (6г)$$

Следовательно, для цепи (2) матрица переходных вероятностей будет иметь вид

$$\pi = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где P_{ij} определяется из уравнений (6).

Таким образом, определение вероятности правильной синхронизации формально сводится к задаче нахождения вероятности появления в однородной цепи Маркова хотя бы одной серии из J нулей. Для решения этой задачи введем вероятности следующих событий:

P_{ξ} – вероятность того, что ξ элементов цепи содержат хотя бы одну серию из J нулей подряд;

$(P_{\xi})_0, (P_{\xi})_1$ – вероятности того, что ξ элементов цепи содержат хотя бы одну серию из J нулей и последние элементы соответственно равны 0 или 1;

$(\bar{P}_{\xi})_0, (\bar{P}_{\xi})_1$ – вероятности того, что ξ элементов цепи не содержат ни одной серии из J нулей и последние элементы соответственно равны $S_{\xi} = 0$ и $S_{\xi} = 1$.

Тогда получаем очевидное равенство

$$P_{\xi} = (P_{\xi})_0 + (P_{\xi})_1. \quad (8)$$

Ясно также, что $(\bar{P}_{\xi})_0 + (P_{\xi})_0$ есть безусловная вероятность того, что $S_{\xi} = 0$. Как известно, она равна $P_0 \cdot P_{00}^{\xi-1} + P_1 \cdot P_{10}^{\xi-1}$, где

$P_{ij}^{(z)} = P \left\{ \begin{matrix} S_{m+z} = j \\ S_m = i \end{matrix} \right\}$ есть соответствующий элемент степени матрицы π . Итак, можем записать

$$\left(\bar{P}_{\xi}\right)_0 + \left(P_{\xi}\right)_0 = P_0 \cdot P_{00}^{\xi-1} + P_1 \cdot P_{10}^{\xi-1}. \quad (9)$$

Аналогично

$$\left(\bar{P}_{\xi}\right)_1 + \left(P_{\xi}\right)_1 = P_0 \cdot P_{01}^{\xi-1} + P_1 \cdot P_{11}^{\xi-1}. \quad (10)$$

Найдем рекуррентные соотношения для определения $\left(P_{\xi}\right)_0$ и $\left(P_{\xi}\right)_1$.

Так как $\left(P_{\xi}\right)_1$ есть вероятность того, что ξ элементов цепи содержат хотя бы одну серию из J нулей подряд и $S_{\xi} = 1$, то, очевидно, что $\xi-1$ элементов уже имеют серию из J нулей, следовательно:

$$\left(P_{\xi}\right)_1 = \left(P_{\xi-1}\right)_0 \cdot P_{01} + \left(P_{\xi-1}\right)_1 \cdot P_{11}. \quad (11)$$

Если же ξ элементов содержат серию из J нулей подряд и $S_{\xi} = 0$, то либо $\xi-1$ элементов уже имели требуемую серию, либо такая серия появилась благодаря последнему элементу цепи $S_{\xi} = 0$. В последнем случае имеем

$\dots S_{\xi-1} = 1, S_{\xi-J+1} = S_{\xi-J+2} = \dots = S_{\xi-1} = S_{\xi} = 0$ и $\xi-J$ первых элементов цепи не имеют серии из J нулей подряд. Поэтому получаем

$$\left(P_{\xi}\right)_0 = \left(P_{\xi-1}\right)_0 \cdot P_{00} + \left(P_{\xi-1}\right)_1 \cdot P_{10} + \left(\bar{P}_{\xi-1}\right)_1 \cdot P_{10} \cdot P_{00}^{J-1}. \quad (12)$$

Формулы (11), (12) являются требуемыми рекуррентными соотношениями. Значение $\left(\bar{P}_{\xi-1}\right)_1$ в формуле (12) находится из равенства (10).

Таким образом, определив $\left(P_{\xi}\right)_0$ и $\left(P_{\xi}\right)_1$ по формулам (10), (11), (12), по формуле (8) легко находится P_{ξ} , соответствующая при $\xi=N$ вероятности правильного приема РС.

Для нахождения $\left(\bar{P}_{\xi-1}\right)_1$ из (10) приходится матрицу (7) предварительно возводить в $(\xi-j-1)$ -ю степень, что затрудняет инженерные расчеты. Найдем выражение для $\left(\bar{P}_{\xi}\right)_1$ непосредственно через исходные данные. Для этого диагонализирuem матрицу π . Найдем характеристические числа этой матрицы, учитывая, что $P_{01}=1-P_{00}$ и $P_{11}=1-P_{10}$. Матрица принимает тогда вид

$$\pi = \begin{vmatrix} P_{00} & 1 - P_{00} \\ P_{10} & 1 - P_{10} \end{vmatrix}$$

и ее характеристическим уравнением будет уравнение

$$\lambda^2 - (P_{00} - 1 - P_{10}) \cdot \lambda + P_{00} - P_{10} = 0,$$

откуда получаем: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = P_{00} - P_{10}$.

Следовательно, матрица π подобна диагональной матрице

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{00} - P_{10} \end{vmatrix}.$$

Найдем матрицу подобия $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ из равенства $A^{-1} \cdot \pi \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{00} - P_{10} \end{vmatrix}$,

то есть

$$\pi \cdot A = A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{00} - P_{10} \end{vmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} P_{00} \cdot a_{11} + (1 - P_{00}) \cdot a_{21} &= a_{11}; \\ P_{00} \cdot a_{12} + (1 - P_{00}) \cdot a_{22} &= a_{12} \cdot (P_{00} - P_{10}). \end{aligned}$$

Пологая здесь $a_{11}=1$ и $a_{12}=P_{00}-1$, получаем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & P_{00} - 1 \\ 1 & P_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -P_{01} \\ 1 & P_{10} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

соответственно

$$A^{-1} = \frac{1}{P_{10} + P_{01}} \cdot \begin{vmatrix} P_{10} & P_{01} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Так как

$$\pi = A \cdot \text{diag}(1; P_{00} - P_{10}) \cdot A^{-1}, \text{ то}$$

$$\pi^z = A \cdot \text{diag}(1; (P_{00} - P_{10})^z) \cdot A^{-1}. \quad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в (15) и осуществляя умножение, находим

$$P_{01}^{\xi} = \frac{P_{01} \left(1 - (P_{00} - P_{10})^{\xi} \right)}{P_{01} + P_{10}} ; \quad (16)$$

$$P_{11}^{\xi} = \frac{P_{01} + P_{10} \cdot (P_{00} - P_{10})^{\xi}}{P_{01} + P_{10}} . \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (10) получаем

$$(P_{\xi})_1 + (\bar{P}_{\xi})_1 = \frac{P_{01} + P_{10} (P_{00} - P_{10})^{\xi-1}}{P_{01} + P_{10}} - P_0 (P_{00} - P_{10})^{\xi-1} .$$

Откуда находим

$$(\bar{P}_{\xi})_1 = \frac{P_{01} + P_{10} (P_{00} - P_{10})^{\xi-1}}{P_{01} + P_{10}} - P_0 (P_{00} - P_{10})^{\xi-1} - (P_{\xi})_1 . \quad (18)$$

В правой части (18) содержатся только исходные вероятности, что и требовалось определить.

Таким образом, расчет $P_{\text{пп}}$ на каналах с зависимыми ошибками осуществляется следующим образом:

1. При $1 < \xi < J$ имеем $(P_{\xi})_1 = 0$, $(P_{\xi})_0 = 0$, $P_{\xi} = 0$.
2. При $\xi = J$ получаем $(P_{\xi})_1 = 0$, $(P_{\xi})_0 = 0$, $P_{\xi} = 0$.
3. При $\xi > J$ по формуле (11) находим $(P_{\xi})_1$, по формуле (18) находим $(\bar{P}_{\xi-J})_1$, по формуле (12) находим $(P_{\xi})_0$ и, наконец, по формуле (8) находим P_{ξ} .

Полученные рекуррентные соотношения (11), (12) и (17) удобны для программирования на ПЭВМ. Легко показать, что для каналов с независимыми ошибками расчеты по данной методике приводят, как и следовало ожидать, к известной точной формуле Козлова [3]. В качестве одной из важных прикладных задач произведем оценку вероятности $P_{\text{пп}}$ рекуррентного сигнала в составных рэлеевских замирающих каналах (РЗК).

Расчет вероятности правильной синхронизации в составных каналах РЗК

Для рассматриваемого канала вероятность безошибочного приема блока из ξ знаков определяется при помощи соотношений [4]:

$$P_{6\alpha}(\varepsilon) = \frac{1 + \frac{H^2}{2} \cdot \varepsilon \cdot P_{6\alpha}(\varepsilon - 1)}{1 + \frac{H^2}{2} \cdot \varepsilon} , \quad \varepsilon < 1 , \quad (19)$$

где

$$P_{6\alpha}(1) = \frac{H^2 + 1}{H^2 + 2} .$$

Подставляя (19) в выражения (3), (4) и (6), найдем начальные и переходные вероятности аппроксимирующей цепи Маркова. Тогда по формулам (11), (18), (12) и (8) определим вероятность $P_{\text{пп}}^{P^3}$.

Расчеты по указанным формулам производились на ПЭВМ для различных значений H^2 , n и параметра модели J . Результаты расчета показаны графически на рис. 2, 3. Из рис. 2 видно, что при $H^2=8$, $N=63$ и различных значениях n , функция

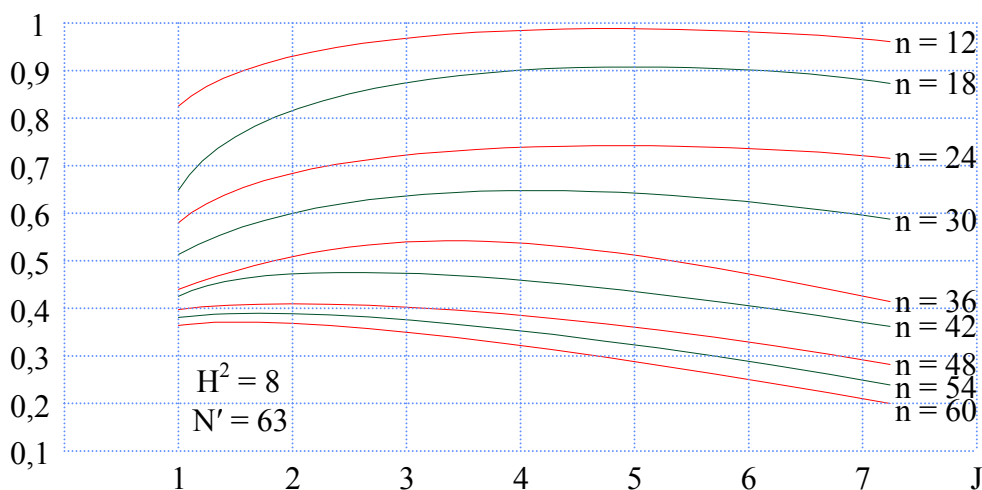


Рис. 2. Вероятность правильной синхронизации ПСП в РЗК

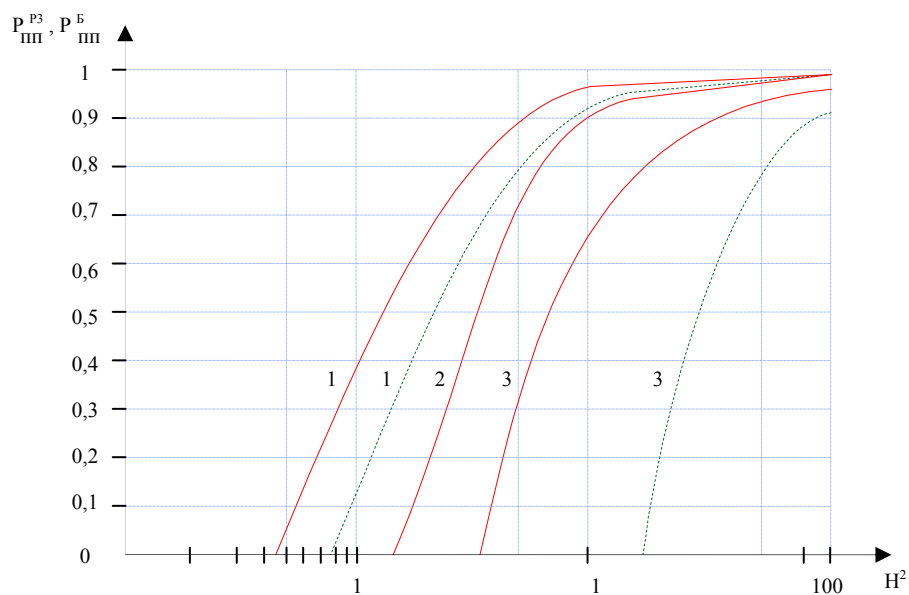


Рис. 3. Сравнительный расчет вероятности синхронизации ПСП.
 Расчет по точной формуле. Расчет для зависимых ошибок.;
 1 – при $n = 14$; 2 – при $n = 28$; 3 – при $n = 56$

$P_{\text{пн}}^{\text{рз}} = \varphi(J)$ имеет явно выраженный максимум. Если на интервале 2ε канал является составным, то $P_{\text{пнмакс}}$ можно считать оптимальным. Из графика видно, что оптимальная длина ε , при которой $P_{\text{пнмакс}} \geq 0,9$, равна трем, так как при $\varepsilon > 3$, $P_{\text{пн}} \leq 0,9$. То есть в этом случае оптимальный параметр модели ($J_{\text{опт}}=5$).

На рис.3 приведены графики $P_{\text{пн}}^{\text{рз}} = \varphi(H^2)$ для $N^2=127$ и $J_{\text{опт}}$. Там же для сравнения показаны графики $P_{\text{пн}}^{\text{б}} = \varphi(H^2)$ для эквивалентного биномиального канала, полученные по формуле [3]. Видно, что вероятность правильной синхронизации РС на каналах с памятью выше, чем в биномиальных и эта разница значительно возрастает при уменьшении H^2 . Кроме того, легко заметить, что в биномиальном канале с увеличением n вероятность $P_{\text{пн}}$ падает быстрее, чем в канале с памятью. Из графика видно, что при выбранном интервале наблюдения, равном 127, наименьшее значение H^2 , при котором вероятность синхронизации РС будет $P_{\text{пн}} \geq 0,9$, равно 6 и $n=14$. Для того чтобы сохранить $P_{\text{пн}} \geq 0,9$ при меньших $H^2 < 6$, необходимо увеличить интервал наблюдения N^2 или уменьшить n .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хисамов Д.Ф. Расчет вероятности ложной синхронизации псевдослучайной последовательности по методу зачетного отрезка в биномиальных каналах связи / Сборник научных работ. – СПб.: ВМИ, 2002. – С.5-7.
2. Хисамов Д.Ф. Граничные оценки вероятности синхронизации псевдослучайной последовательности на каналах с произвольным распределением ошибок / Материалы международного конгресса «Математика в XXI веке» // 25-28 июня 2003 г. – Новосибирск: Академгородок, 2003. – <http://www.sbras.ru/ws/MMF-21/>
3. Козлов А.Ф. О вычислении вероятности неприема рекуррентного сигнала / Сборник научных трудов ЦНИИИС МО СССР. – М., 1964. – № 4.
4. Коржик В.И., Финк Л.М. Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. – М.: Связь, 1975.

УДК 621.391

А.П. Жук, З.В. Черняк, В.В. Сазонов, А.С. Иванов

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ АНСАМБЛЕЙ СИГНАЛОВ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ РАЗМЕРНОСТЬЮ В СИСТЕМЕ CDMA

В настоящее время большинством стран осуществляется переход систем мобильной связи на технологии третьего поколения (3G). Международным институтом электросвязи подтверждено, что в мобильных системах связи 3G будет широко использован радиointерфейс на базе технологии CDMA. Тем самым на высшем техническом уровне признается лидерство самой эффективной технологии CDMA по сравнению с технологиями TDMA систем мобильной связи GSM, DAMPS. Кроме того, правопреемник Ассоциации 3G – Инфокоммуникационный союз – признал целесообразным создание в России сетей 3G на базе стандарта CDMA-2000 [1].

Поскольку технология CDMA использует сложные шумоподобные сигналы, то к ней предъявляются повышенные требования к помехозащищенности, частотной эффективности и скорости передачи данных [2].