

УДК 681.3.681.5

В.Г. Кобак, Р.А. Нейдорф

**О ВЗАИМОСВЯЗИ КВАДРАТИЧНОГО И МИНИМАКСНОГО КРИТЕРИЕВ
В ОДНОРОДНОЙ N-ПРИБОРНОЙ СИСТЕМЕ С МОНОЛИТАМИ**

Введение. С 2002 [1] года в теории расписаний стало развиваться интересное направление, связанное с применением аналитических методов для оценки и решения распределительных задач. До этого времени аналитические методы в теории расписаний практически не применялись. Суть нового подхода состояла в том, что ее авторам удалось сформулировать и теоретически обосновать тот факт, что в некоторых случаях возникает возможность использовать результаты оптимального решения распределительной задачи для какого-либо из распространенных критериев (минимаксный, квадратичный, среднеквадратичный) на результаты оптимизации решения задачи по другому критерию.

Естественно, что первый результат этого направления получен для двухприборного распределения, однако исследование показали возможность перенесения этих результатов с некоторыми ограничениями на трехприборные системы, опубликованные в работах [2, 3]. При этом в работе [2] было показано, что если в трехприборном распределении, оптимальном по квадратичному критерию, загрузка одного из приборов состоит из одной задачи, то такое распределение оптимально и по минимаксному критерию. В статье [3] приводятся результаты разработки алгоритма, который позволяет определить – на сколько больше максимальная загрузка в оптимальном квадратичном критерию оптимального минимаксного критерия.

В.Г. Кобаком было показано, что аналитическими методами можно не только оценивать совпадение или несовпадение, но и получать различные распределения. Последней работой посвященной указанному направлению явилась статья в журнале «Системы управления и информационные технологии», в которой вскрыты и проанализированы структурные варианты перестроения распределений в трехприборной системе и практически завершена теория оценки трехприборных распределений. Актуальность рассматриваемого направления несомненна, так как полученные результаты позволяют оценивать близость результатов решения распределительной задачи по различным критериям. Это связано с высокой ресурсоемкостью решения распределительных NP-полных задач.

В связи с полученными обнадеживающими результатами исследования в этом направлении получили продолжение. В частности, данная статья посвящена расширению упомянутых выше результатов на четырехприборные системы обработки информации. Важность и своевременность такого расширения связана с появлением и широким внедрением в последнее время четырехядерных процессоров (а ведётся разработка и восьмиядерных процессоров!).

В связи с необходимостью разработки поднятых здесь вопросов, далее приводится математическая постановка оптимизационной распределительной задачи.

1. Постановка задачи. Задача составления расписания сводится к разбиению исходного множества заданий $S = \{s_i | i = \overline{1, n}\}$ на n непересекающихся подмножеств, т.е.

$$S_j : \forall j, k \in [1, n] \rightarrow S_j \cap S_k = \emptyset, \bigcup_{j=1}^n S_j = S. \quad (1)$$

Произвольный вариант такого разбиения по заданиям удобно обозначать как функцию множества распределяемых заданий и количества приборов в следующем виде:

$$R[S, n] = \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \quad (2)$$

При этом каждому варианту разбиения $R[\cdot]$ соответствует определённый вариант

$$Z[m, n] = \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \quad (3)$$

разбиения исходного количества заданий m на n комбинаций, содержащих по m_j заданий каждая, которые отвечают совокупному условию

$$\sum_{j=1}^n m_j = m. \quad (4)$$

При оптимизации расписания в качестве показателя эффективности выступает какой-либо критерий оценки его качества, например, критерий максимальной загрузки

$$Q_{mm} = \max \{T_j : j = \overline{1, n}\}, \quad (5)$$

где $T_j = \sum_{k \in I_j} t_k$ – общая оценка загрузки j -го прибора выполнением назначенных

ему m_j заданий; $I_j = \{l, q, \dots\} : (l \neq q) \& (l, q, \dots \in \overline{1, m})$, $K(I_j) = m_j$, а $K(\cdot)$ суть кардинальное число или мощность множества индексов I_j .

Кроме основного наиболее распространенного критерия (5) используется квадратичный предложенный в работе [2] оценочный критерий

$$Q_{kv} = \sum_{j=1}^m T_j^2, \quad (6)$$

который также стимулирует уменьшение максимальных нагрузок, но упрощает оценку вариантов.

При решении оптимизационных задач ищется такое распределение работ по приборам, при котором оценочные критерии (5) или (6) принимают минимальные значения. В этом случае распределительные задачи называют минимаксными или минимумом квадратичного критерия.

В общем случае, сформулированная задача чрезвычайно сложна (в связи с известным фактом её NP-полноты), и не поддаётся аналитическому решению. Однако при определенных свойствах исходной совокупности заданий появляется возможность, аналитической оценки свойств расписания. Так, в работе [3] показано, что для двухприборных систем оптимального решения распределительной задачи по одному из критериев (5) и (6) достаточно, чтобы использовать его как оптимальное по другому критерию без повторного решения. В работах [2-4] возможность аналитической оценки расширена на трехприборные системы, содержащие так называемые выделенные «монолиты»[©]. В данной статье найдено условие при

[©] Задание, выполнение которого требует столь большого ресурса, что алгоритм распределения назначает для его обслуживания отдельный прибор.

которых подобные аналитические оценки можно переносить на n -приборные распределительные системы, содержащие такие ресурсоёмкие работы.

2. Аналитическое исследование 4-приборной распределительной задачи с выделенными монолитами. Пусть исследованию подлежит распределение, оптимальное по квадратичному критерию (6), где загрузки двух приборов представляют собой монолиты, а другие два загружены остальными заданиями, как это показано на рис. 1.

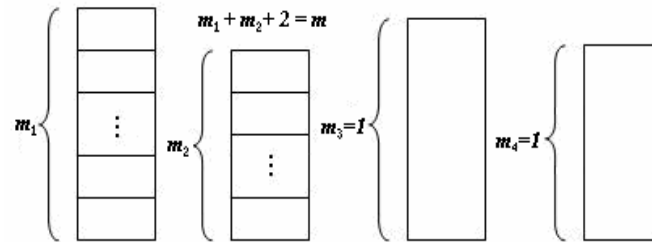


Рис. 1. Распределение с $n = 4$ и двумя монолитами

Теорема 1. Если распределение работ в однородной четырехприборной системе имеет экстремальное по квадратичному критерию (6) решение задачи распределения, в котором в качестве загрузок двух любых приборов с любым статусом оценки: $T_{\max(\text{mid}, \text{min})}^{kv}$, выступают оценки времени выполнения выделенного монолита, то это же распределение работ оптимально по критерию (5).

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теоремой 2 из [3] суть которой: Если выборка работ в однородной трехприборной системе имеет экстремальное по решению по критерию (6) задачи распределения, в котором в качестве любой из загрузок $T_{\max(\text{mid}, \text{min})}^{kv}$ выступает оценка времени выполнения выделенного монолита, то это же распределение работ оптимально по критерию (5).

Данная теорема опирается на теорему 1 из [2] суть которой состоит в том, что для несовпадения оптимумов загрузок однородной трехприборной системы по критериям (5) и (6), необходимо, чтобы допускалось такое перераспределение работ оптимальных по критерию (6) загрузок приборов, чтобы максимальная и минимальная загрузки уменьшались, а средняя загрузка приближалась к минимаксному пределу формируемого распределения, оптимального по критерию (5).

Поскольку из анализа этой теоремы ясно, что добавление монолита, который лежит в пределах $T_{\max(\text{mid}, \text{min})}^{kv}$ не повлияет на значение минимаксного критерия, так как не появляется новых элементов, которыми можно было изменить загрузку системы, то теорему 1 можно считать доказанной.

Полученный результат можно распространить и на n -приборную систему. Таким образом можно сформулировать более общее свойство многоприборных систем.

Теорема 2 Если распределение работ в однородной n -приборной системе имеет экстремальное по критерию (6) решение задачи распределения, в котором в качестве любой из $n - 2$ загрузок $T_{\max(\text{mid}, \text{min})}^{kv}$ выступает оценка времени выпол-

нения выделенного монолита, то это же распределение работ оптимально по критерию (5).

Доказательство. Пусть имеется распределение, оптимальное по критерию (6), где нагрузка $n - 2$ прибора представляет собой монолит, а другие два загружены остальными заданиями (рис. 2).

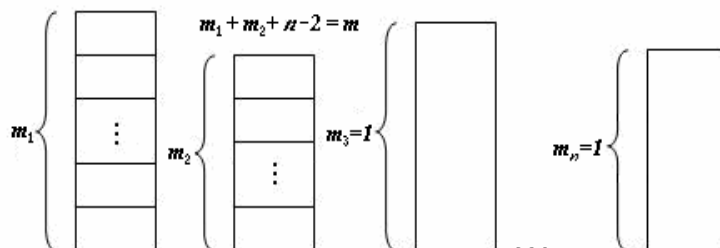


Рис. 1. Распределение с произвольным n и $n - 2$ монолитами

Как и в вышеприведенном случае срабатывают теоремы 1 и 2 из [2]. Добавление к двухприборному распределению $n - 2$ монолита также не позволяет перераспределить задания, чтобы уменьшить критерий (5).

Таким образом, сформулированная выше теорема доказана.

Выводы. Обоснованный в статье результат дает возможность получать еще более значительный выигрыш в ресурсах системы, поскольку время получения точного решения намного превосходит аналогичный показатель для двухприборной и трехприборной системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нейдорф Р.А., Радченко В.М., Кобак В.Г. Критериальная инвариантность распределительных задач в однородных двухприборных системах // Известия вузов «Электромеханика». – 2003, №2. – С. 59-61.
2. Кобак В.Г., Нейдорф Р.А. Соотношение квадратичного и минимаксного оптимальных распределений загрузки однородных трехприборных систем // Известия вузов «Электромеханика». – 2005, №3. – С. 60-65.
3. Кобак В.Г., Нейдорф Р.А. Взаимосвязь минимаксного и квадратичного критериев в однородной трехприборной системе // Информатика и системы управления. – 2005, №2. – С. 162-169.
4. Кобак В.Г. Модели и свойства распределений независимых заданий в технических системах: монография. – Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2006.

УДК 004.9

Тиек Ленг

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНОГО ПОДХОДА ПРИ РАЗРАБОТКЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

Введение. Развитие и коммуникация современного информационного общества немислимы без использования информационных ресурсов, которые собираются из огромного количества разнородных электронных источников [3]. Идея интеграции разнородных информационных ресурсов в одну базу может получить