

E-mail: vvpetrov@fib.tsure.ru.
347922, г. Таганрог, ул. Греческая, 12.
Тел.: 8(8634)371-624
Кафедра химии и экологии.
Доцент.

Aleksandrova Mariy Sergeevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: hie@fib.tsure.ru
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347922, Russia.
Phone: 8(8634)371-624
Department of Chemistry and Ecology.
Student.

Kopilova Natalya Fedorovna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: hie@fib.tsure.ru
7, Dyumo strit, Taganrog, 347905, Russia.
Phone: 8(8634)371-624
Department of Chemistry and Ecology.
Assistant.

Petrov Viktor Vladimirovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: vvpetrov@fib.tsure.ru.
12, Grecheskaya street, Taganrog, 347922, Russia.
Phone: 8(8634)371-624
Department of Chemistry and Ecology.
Associate professor.

УДК 530.1

В.Г. Сапогин

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Построен гамильтонов формализм бесстолкновительного движения гравитирующих частиц в плоском самосогласованном поле. Показано, что поле системы представляет собой потенциальную яму, глубина которой определяется интегралом энергии, а длина – значением интеграла полного давления. Рассчитанное распределение концентрации указывает на то, что поле выталкивает вещество системы на её границы, образуя у границ области с высокой концентрацией медленных частиц.

Гамильтонов формализм; плоское самосогласованное поле; потенциальная яма; интеграл полного давления; область высокой концентрации.

V.G. Sapogin

HAMILTON'S FORMALISM OF PLANE DYNAMIC SYSTEM OF GRAVITATING PARTICLES

Hamilton's formalism of collisionless motion of gravitating particles in the plane self-consistent field has been formulated. Else it has been shown that the field of the system has a form of potential well where the depth and the width are defined by integrals of energy and total pressure accordingly. The distribution of numerical density calculated points to the field pushes out a system's matter on the boarder, where the regions of high numerical density of slow particles are formed.

Hamilton's formalism; plane self-consistent field; potential well; total pressure integral; region of high numerical density.

Рассмотрим двухпотокное периодическое движение нерелятивистских гравитирующих частиц системы, ограниченное по продольной координате x , при котором уравнение непрерывности имеет вид

$$\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0, \tag{1}$$

где \vec{j}_1 – плотность потока частиц, движущихся в положительном направлении оси x , а \vec{j}_2 – плотность потока частиц, движущихся против оси x . При этом $j_1 = j_2 = j_0$. В силу плоской симметрии задачи для любого потока в (1)

$$j_0 = n(x)v(x) / 2 = n_0v_0 / 2 = const, \tag{2}$$

где n – концентрация системы в произвольной плоскости; v – соответствующий ей модуль скорости частиц системы; n_0 – минимальная (наименьшая) концентрация системы в плоскости $x=0$; v_0 – максимальная (наибольшая) скорость частиц системы (здесь и далее индекс «0» относится к плоскости $x=0$).

Предположим, что система бесстолкновительна. Движение гравитирующей частицы в статическом самосогласованном поле не зависит от времени явно и определяется интегралом энергии

$$E = \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + m\phi = const, \tag{3}$$

где E – значение механической энергии, одинаковое у всех частиц, m – масса гравитирующей частицы.

Пространственное распределение потенциала статического самосогласованного гравитационного поля ϕ описывается уравнением Пуассона, в правой части которого концентрация частиц должна быть выражена через функцию распределения по координате:

$$\phi'' = 4\pi Gmn(\phi), \tag{4}$$

где G – гравитационная постоянная.

Бесстолкновительная функция распределения частиц $n(\varphi)$ следует из (2), (3) и имеет вид

$$n = n_0 / \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}, \quad (5)$$

где $\varphi_n = \frac{E}{m} = \frac{v_0^2}{2}$ – наибольшее значение гравитационного потенциала системы, достигаемое на ее границах. В бесстолкновительном случае концентрация частиц системы больше там, где больше её потенциал.

Подставляя выражение (5) в (4), получим

$$\varphi'' = \frac{4\pi G m n_0}{\sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}}. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает статические двухпоточковые равновесия периодически движущихся гравитирующих частиц с самосогласованным полем. Оно имеет вид $y'' = f(y)$, который допускает понижение порядка. Понижение порядка приводит к интегралу живых сил, размерность которого не совпадает с размерностью энергии.

Гамильтонова функция взаимодействия частиц с полем. Уравнение (6) имеет первый интеграл, являющийся гамильтоновой функцией системы и соответствующий ее полному давлению P :

$$(\varphi')^2 / 8\pi G + p_0 \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n} = P = H(\varphi' / 4\pi G, \varphi, x) = const, \quad (7)$$

где $p_0 = m n_0 v_0^2$ – давление частиц в плоскости $x=0$.

Первое слагаемое в (7) представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе – бесстолкновительное давление частиц одномерной системы $p = 2m n v^2 / 2$, совпадающее с удвоенной объемной плотностью их кинетической энергии. Закон сохранения (7) впервые получен в [1,2]. Там исследован частный случай состояний, при которых полное давление P совпадает с давлением частиц p_0 в плоскости $\varphi = 0$. Ниже проведено обобщение на случай $P \geq p_0$.

Закон сохранения (7) означает также, что в любой плоскости пространства взаимодействия рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления. Поскольку объемная плотность силы Бернулли противоположна градиенту давления частиц ($\vec{f} = -grad(p)$), то она получает новое математическое определение: *сила Бернулли совпадает по величине и направлению с градиентом давления самосогласованного поля и обеспечивает класс равновесий частиц с полем, которое они сами и создают.*

Из (7) видно, что она является силой расталкивания и удерживает систему от ньютоновского притяжения (гравитационного коллапса), компенсируя её в каждом элементарном объеме системы.

Распределения физических величин. Разделим обе части (7) на p_0 и введём обозначения: $\beta = P / p_0 \geq 1$ – параметр состояния двухпоточковой системы, $g_* = \sqrt{8\pi G p_0}$ – масштаб напряженности гравитационного поля.

При положительном полном давлении (параметр состояния изменяется в пределах $1 \leq \beta < \infty$) система находится в двухпоточковом состоянии периодического движения частиц. В этом случае существует два значения координаты $x = \pm L$, при которых давление частиц системы $p(\varphi)$ обращается в нуль и система ограничена. При $x = \pm L$ ее потенциал принимает наибольшее значение φ_n , а градиент потенциала имеет одинаковый модуль, но различные знаки $\varphi'_n = \sigma \sqrt{8\pi G P}$, где $\sigma = \text{sign}(\varphi')$. Как показывает решение, в этих плоскостях частицы системы останавливаются. Плоскости $x = \pm L$ назовем плоскостями возврата потока. Они же ограничивают длину системы.

Будем искать интегральные кривые, проходящие через точку (0,0). Для этого интегрирование в (7) представим в виде

$$\sigma x = \int_0^\varphi d\varphi / \sqrt{8\pi G [P - p_0 \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}]}. \quad (8)$$

Интегрируя (8), получим

$$\frac{\sigma x}{l} = (\beta - \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n})^{1/2} (2\beta + \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n}) - (\beta - 1)^{1/2} (2\beta + 1), \quad (9)$$

где

$$l = v_0 / (3\sqrt{2\pi G m n_0}) \quad (10)$$

– пространственный масштаб системы.

Набор функций $x = x(\varphi)$ в (9) содержит четыре решения. Первое из них получается при $\sigma=+1$ (решение имеет положительную производную в нуле и проходит через нуль). Второе – для $\sigma=-1$ (решение имеет отрицательную производную в нуле и проходит через нуль). Третье решение (оно положительно в области допустимых значений и имеет скачок производной в нуле) формируется при $\sigma=\sigma_1$, где

$$\sigma_1 = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Четвёртое (оно отрицательно в области допустимых значений и имеет скачок производной в нуле) получается при $\sigma=\sigma_2$, где

$$\sigma_2 = \begin{cases} +1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Физическую ситуацию описывает третье решение. Полудлина системы $x = L$ следует из (9) при $\varphi / \varphi_n = 1$, $\sigma = +1$ и зависит от ее параметра состояния

$$\frac{L}{l} = 2\beta^{3/2} - (\beta - 1)^{1/2}(2\beta + 1). \quad (13)$$

Длина системы $d = 2L$.

Для получения зависимости $\varphi = \varphi(x)$ введем в (9) безразмерные переменные

$$t = \sqrt{1 - \varphi / \varphi_n} / \beta, \quad z = (x_0 + \sigma x) / (l\beta^{3/2}), \quad (14)$$

где $x_0 / l = (\beta - 1)^{1/2}(2\beta + 1)$. Находя $t = t(z)$ из (9), получим законы пространственного распределения потенциала в виде составной функции в области $0 \leq z \leq 2$:

$$\varphi_1 / \varphi_n = 1 - \beta^2(2 \cos \theta_1 - 1)^2 \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (15)$$

$$\varphi_2 / \varphi_n = 1 - \beta^2(2 \cos \theta_2 - 1)^2 \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2, \quad (16)$$

где

$$\theta_1 = [\arccos(1 - z^2 / 2)] / 3; \quad (17)$$

$$\theta_2 = [\pi - \arccos(z^2 / 2 - 1)] / 3. \quad (18)$$

Из соотношений (15–18) видно, что при $\beta=1$ самосогласованное поле системы представляет собой симметричную относительно $x=0$ необычную потенциальную яму, которая ограничена по глубине и в пространстве. Глубина ямы определяется интегралом энергии, а длина – значением интеграла полного давления.

При $\beta>1$ самосогласованное поле представляет собой ограниченную в пространстве потенциальную щель V – образной формы. В этом случае минимум потенциальной энергии в системе не возникает. В ней появляется наименьшее значение потенциальной энергии, достигаемое на дне щели. На рис. 1 представлен вид потенциального рельефа для различных значений параметра состояния системы. Кривая 1 соответствует параметру состояния $\beta=1$; кривая 2 – $\beta=1,1$; кривая 3 – $\beta=1,5$; кривая 4 – $\beta=4,0$. Как видно из рис. 1, полученные кривые при $\beta>1$ оказываются похожи на потенциальный рельеф, возникающий в одномерном зарядовом кластере [3]. Их существенное отличие заключается в различных знаках производных второго порядка и сил, удерживающих систему.

Проекция напряженности самосогласованного поля системы на координату x находится дифференцированием из (15–18):

$$g_1(x) = -2\sigma g_* \sqrt{\beta} \sin(\theta_1 / 2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (19)$$

$$g_2(x) = -2\sigma g_* \sqrt{\beta} \sin(\theta_2 / 2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (20)$$

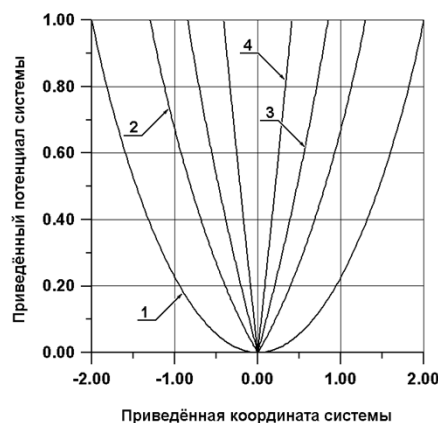


Рис. 1

Как видно из (19–20), проекция напряженности поля системы терпит разрыв при переходе через плоскость нуля потенциала, изменяясь в конечных пределах от $g_*\sqrt{\beta-1}$ до $-g_*\sqrt{\beta-1}$. С ростом β ширина щели уменьшается, а скачок напряженности гравитационного поля увеличивается.

Законы изменения скорости частиц и давления по длине системы находятся из (3) и второго слагаемого в (7) и имеют вид

$$p_1/p_0 = v_1/v_0 = \beta(2\cos\theta_1 - 1) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (21)$$

$$p_2/p_0 = v_2/v_0 = \beta(2\cos\theta_2 - 1) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2$$

Законы изменения скорости частиц и давления по длине системы находятся из (3) и второго слагаемого в (7) и имеют вид

$$p_1/p_0 = v_1/v_0 = \beta(2\cos\theta_1 - 1) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (21)$$

$$p_2/p_0 = v_2/v_0 = \beta(2\cos\theta_2 - 1) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (22)$$

Изменение концентрации по длине системы находится из (5) и имеет вид

$$n_1/n_0 = [\beta(2\cos\theta_1 - 1)]^{-1} \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (23)$$

$$n_2/n_0 = [\beta(2\cos\theta_2 - 1)]^{-1} \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (24)$$

Распределение давления поля по длине системы имеет вид

$$D_1 = g_1^2/8\pi G = 4\beta p_0 \sin^2(\theta_1/2) \text{ при } 0 \leq z \leq \sqrt{2}; \quad (25)$$

$$D_2 = g_2^2/8\pi G = 4\beta p_0 \sin^2(\theta_2/2) \text{ при } \sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad (26)$$

Из соотношений (21) и (25), а также (22) и (26) видно, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы $P = \beta p_0$.

Для параметра состояния $\beta=2$ на рис. 2 представлены зависимости концентрации частиц n/n_0 (кривые 1-1), давления поля D/p_0 (кривые 2-2), давления частиц p/p_0 (кривые 3-3) от приведённой координаты x/l системы. Из рисунка видно выполнение закона сохранения (7) и тот факт, что для любых значений параметра состояния поле выталкивает вещество системы на границы, образуя у границ области с высокой концентрацией медленных частиц.

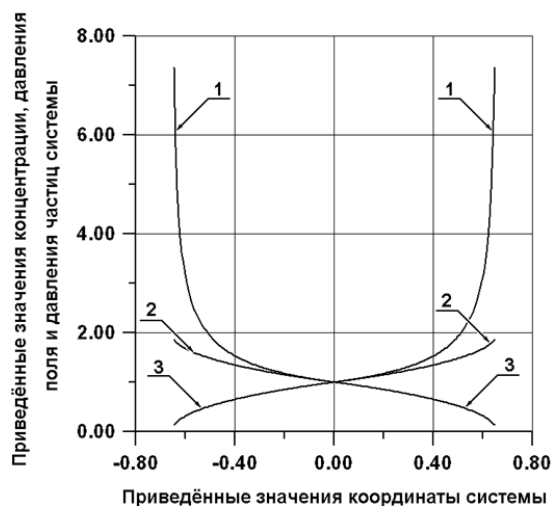


Рис. 2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц // Изв. высш. учеб. зав. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. – 1996. – №3. – С. 72–78.
2. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем. – Таганрог. Изд-во ТРТУ, 2000. – С. 254.
3. Сапогин В.Г. Бесстолкновительный кластер плоской динамической системы зарядов с V – образной потенциальной щелью // Вестник Южного Научного Центра. – 2005. – Т.1, – №2, апрель-май-июнь. – С. 9–16.

Сапогин Владимир Георгиевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sapogin@mail.ru; e-mail: vladsapogin@yandex.ru.

Web-site: egf.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, Некрасовский 44.

Тел.: 8(8634)37-16-63; 8(8634)312-368.

Кафедра физики.

Профессор.

Sapogin Vladimir Georgievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sapogin@mail.ru; e-mail: vladsapogin@yandex.ru.

Web-site: egf.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)37-16-63; 8(8634)312-368.

Department of Physics.

Professor.

УДК 519.6

А.И. Сухинов, О.В. Колгунова, Д.А. Зорина

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГИДРОФИЗИКИ
ВОДОЕМОВ НА ОСНОВЕ СХЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ**

В данной работе построен алгоритм для двумерной модели совместного движения водной среды, транспорта тепла и соли. Данный алгоритм базируется на схемах расщепления и методе поправки к давлению. В случае сильно меняющихся соленостей и (или температур) возникает необходимость организации итерационного процесса, позволяющего согласовать распределение скоростей и плотностей водной среды.

Метод поправки к давлению; принцип максимума; параллельный алгоритм метода циклической редукции.

A.I. Sukhinov, O.V. Kolgunova, D.A. Zorina

**PARALLEL ALGORITHM OF THE SOLUTION OF HYDROPHYSICS
PROBLEM IN BASINS BASED ON SPLITTING SCHEMES**

In this paper the algorithm of two-dimensional model for fluid dynamics, heat and salt transfer is constructed. It based on splitting schemes and Pressure-Correction method. In case of strongly varying salinity and (or) temperatures the necessity of the iterative process creation arises, allowing to coordinate the distribution of velocities and densities of the fluid.

Pressure-Correction method; a principle of the maximum; parallel algorithm of a cyclic reduction method.

Рассмотрим задачу, описывающую в водоеме движение водной среды. Течение жидкости рассматривается в прямоугольной области G . Для простоты под областью G будем подразумевать прямоугольник, боковые границы которого непроницаемы. В области $G = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < t < T\}$ требуется найти в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ достаточно гладкие функции u, v, ρ, P, S, T , описывающие соответственно распределение скоростей, плотности, давления,