Баранцов Владимир Юрьевич
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»
E-mail: vova_barancov@mail.ru.

Graetskaya Oksana Vladimirovna
Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University»
E-mail: kaf_sau@mail.ru
10, Melchikova street, Rostov-on-Don, 344090
Phone: +7(8632)696991

Barancov Vladimir Yurievich
Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University»
E-mail: vova_barancov@mail.ru.

УДК 621.306

А. А. Строцев, А. Л. Оганесян, М. А. Григорян

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ КОНТРОЛЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТРИЧНЫХ ИГР С ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

Предложена методика теоретико-игровой оптимизации алгоритмов контроля на основе классических моделей матричных игр с ограничениями-неравенствами. Она позволяет учесть априорные данные об интервалах неопределённости стохастического описания неопределённых факторов.

Теоретико-игровая оптимизация; алгоритмы контроля; матричные игры с ограничениями.

A.A. Strotsev, A.L. Oganesjan, M.A.Grigoryan

GAME-THEORETICAL OPTIMIZATION OF CONTROL ALGORITHMS OF COMPLICATED SYSTEM BASED ON CLASSICAL MODEL OF MATRIX GAMES WITH CONTINGENCIES –INEQUALITIES

The procedure of game-theoretical optimization of algorithms of control based on classical models of matrix games with contingencies-inequalities was suggested. It is allow to consider the aprioristic date of indeterminacy intervals of stochastic exposition of indefinite factors.

Game-theoretical optimization; algorithms of complicated; matrix games with contingencies.

Эффективность функционирования сложной системы (СС) зависит от качества алгоритмов ее контроля. Методы оптимизации алгоритмов контроля можно классифицировать относительно информационных условий выработки решения, принятых в теории принятия решений: определённости, риска и неопределённости, связанных соответственно с наличием определённых, стохастических и неопределённых факторов.

Нормальный период эксплуатации СС связан с действием, как правило, случайных факторов, имеющих вероятностное описание. Однако периоды приработки и старения СС характеризуются повышенными значениями интенсивностей отказов *Λ(t),* которые носят неопределенный характер. Таким образом, задачи оптимизации алгоритмов контроля следует отнести к задачам принятия решений в условиях неопределённости. Методы решения ряда таких задач разрабатываются в рамках теории игр. В [1] – [4] рассмотрены вопросы теоретико-игровой оптимизации алгоритмов контроля на основе моделей смешанного расширения матричных игр, позволяющей учесть различные виды неопределенности модели проблемной ситуации, связанной с поиском и устранением неисправностей СС. Однако в предложенных моделях отсутствует учёт случайных факторов, связанных с наличием ограничений в виде, как равенств, так и неравенств. Отметим, что ограничения на процесс контроля технического состояния могут быть обусловлены как спецификой самого объекта контроля, так и применением средств и методов контроля. Такие ограничения связаны с известными вероятностями возникновения ряда неисправных состояний, а также с требованиями эксплуатационной документации на применение отдельных алгоритмов контроля. При этом учёт случайного фактора в модели задачи обуславливает включение ограничения в виде равенства, а учёт неопределённости вероятностного описания стохастических факторов – введение в общем случае ограничений-неравенств. Таким образом, рассмотрение вопросов построения теоретико-игровых моделей с ограничениями-неравенствами для оптимизации алгоритмов контроля в условиях сочетания случайных и неопределённых факторов является актуальной задачей.

Рассмотрим процесс контроля функционирования СС с условной остановкой алгоритма контроля. Будем полагать заданными:

— множество всех состояний системы $E=\{e_j\}$, $j=\overline{1,m}$, где $\{e_1\}=E^1$ —исправное состояние СС и соответствующее ему множество; $\{e_2,e_3,\ldots,e_m\}=E^н$ — неисправные состояния (далее неисправности), определяемые требуемой глубиной поиска, и соответствующие им множество; $E=E^1 \cup E^н$;

— множество допустимых элементарных проверок $\Pi=\{\pi_i\}$, $i=\overline{1,n}$.

Различные последовательности элементарных проверок составляют алгоритмы контроля $Q^i, i=\overline{1,n}$. Контроль функционирования СС состоит в последовательном проведении элементарных проверок $\left\langle \pi^i_{i_1}, \pi^i_{i_2}, \ldots, \pi^i_{i_k}, \ldots, \pi^i_{i_z} \right\rangle$ определенных алгоритмом Q^i и анализе их результатов. Если элементарная проверка $\pi^i_{i_k}$ алгоритма контроля имеет положительный исход, то проводят следующую элементарную проверку $\pi^i_{i_{k+1}}$. Если некоторая текущая элементарная проверка $\pi^i_{i_k}$ имеет отрицательный исход, то процесс контроля заканчивается и выделяется подмножество возможных неисправностей $E^i_{i_k} \subset E^н$. Считается, что система находится в состоянии e_1, если исход всех элементарных проверок алгоритма Q^i положительный.

Пусть A – матрица обобщённых затрат на процесс поиска неисправности с элементами a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, задающая модель матричной игры. В отличие от моделей, рассмотренных в [1] – [4] пусть заданы вероятности нахождения СС в ряде состояний (т.е. задано вероятностное описание случайных факторов), области неопределённости вероятностного описания некоторых случайных факторов и требуемые значения вероятностей применения ряда алгоритмов контроля. Без ограничения общности будем полагать

$$з_j \le з_j^{гр},\ j=\overline{m'+1,m''},\ з_j = з_j^{гр},\ j=\overline{m''+1,m},\ m' \le m'', \tag{1}$$

$$o_i = o_i^{гр},\ i=\overline{n'+1,n}, \tag{2}$$

Задача заключается в определении для неопределённых факторов модели таких элементов смешанных стратегий $з_j = з_j^*$, $j=\overline{1,m''}$, $m'' \le m$, $\xi_i = \xi_i^*$, $i=\overline{1,n'}$, $n' \le n$, которые обеспечивали выполнение условия

$$\min_{\substack{\xi_i,\\ i=\overline{1,n'}}} \max_{\substack{\eta_j,\\ j=\overline{1,m''}}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i a_{ij}\eta_j = \max_{\substack{\eta_j,\\ j=\overline{1,m''}}} \min_{\substack{\xi_i,\\ i=\overline{1,n'}}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i a_{ij}\eta_j, \tag{3}$$

при ограничениях (1), (2) и

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1,\ \xi_i \ge 0,\ i=\overline{1,n'}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \eta_j = 1,\ \eta_j \ge 0,\ j=\overline{1,m''}. \tag{5}$$

Построим двойственные задачи линейного программирования для решения (1)-(5). В соответствие, например, с подходом, рассмотренным в [5], сформируем двойственные задачи, имеющие одно и то же значение оптимизируемых функций. Для этого введём следующие обозначения

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}\tilde{X}^T & \overline{\overline{X}}^T\end{pmatrix}^T,\ Y=\begin{pmatrix}\tilde{Y}^T & \overline{Y}^T & \overline{\overline{Y}}^T\end{pmatrix}^T,$$

где $\tilde{X}=(\xi_1 \dots \xi_{n'})^T$, $\overline{\overline{X}}=(\xi_{n'+1} \dots \xi_n)^T$, $\tilde{Y}=(\eta_1 \dots \eta_{m'})^T$, $\overline{Y}=(\eta_{m'+1} \dots \eta_{m''})^T$, $\overline{\overline{Y}}=(\eta_{m''+1} \dots \eta_m)^T$, $\dim A_{11}=n' \times m'$, $\dim A_{12}=n' \times (m''-m')$, $\dim A_{13}=n' \times (m-m'')$, $\dim A_{21}=(n-n') \times m'$, $\dim A_{22}=(n-n') \times (m''-m')$, $\dim A_{23}=(n-n') \times (m-m'')$, при этом, учитывая (1), (2), (3), (4), будем полагать $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}^{гр}$, $\overline{Y} \le \overline{Y}^{гр}$, $\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{Y}}^{гр}$, $E_{n'}^T\tilde{X}+E_{n-n'}^T\overline{\overline{X}}^{гр}=1$, $E_{m'}^T\tilde{Y}+E_{m''-m'}^T\overline{Y}=1-E_{m-m''}^T\overline{\overline{Y}}^{гр}$, $\overline{\overline{X}}^{гр}=(\xi_{n'+1}^{гр} \dots \xi_n^{гр})^T$, $\overline{Y}^{гр}=(\eta_{m'+1}^{гр} \dots \eta_{m''}^{гр})^T$, $\overline{\overline{Y}}^{гр}=(\eta_{m''}^{гр} \dots \eta_m^{гр})^T$.

Тогда задачи линейного программирования для поиска смешанных стратегий могут быть представлены в виде:

- для первого игрока: найти

$$\min_{s_0,\overline{s},\tilde{X}}\left\{\left(1-E_{m-m''}^T\overline{\overline{Y}}^{гр}\right)s_0+\overline{Y}^{гр\,T}\overline{s}+\tilde{X}^T A_{13}\overline{\overline{Y}}^{гр}+\overline{\overline{X}}^T A_{23}\overline{\overline{Y}}^{гр}\right\}, \tag{6}$$

при ограничениях

$$E_{m'}s_0-A_{11}^T\tilde{X} \ge A_{21}^T\overline{\overline{X}}^{гр},\ E_{m''-m'}s_0+\overline{s}-A_{12}^T\tilde{X} \ge A_{22}^T\overline{\overline{X}}^{гр}, \tag{7}$$

$$E_{n'}^T\tilde{X}=1-E_{n-n'}^T\overline{\overline{X}}^{гр},\ \tilde{X} \ge \overline{0}_{n'},\ \ \overline{s} \ge \overline{0}_{m''-m'}, \tag{8}$$

где E_g – вектор с единичными элементами, $dim\,E_g = g$, $\overline{0}_p$ – вектор с нулевыми элементами, $dim\,\overline{0}_p = p$;

- для второго игрока: найти

$$\max_{q,\widetilde{Y},\overline{Y}} \left\{ \left(1 - E_{n-n'}^T \overline{\overline{X}}^{\,гр}\right) q + \overline{\overline{X}}^{\,гр\,T} A_{21} \widetilde{Y} + \overline{\overline{X}}^{\,гр\,T} A_{22} \overline{Y} + \overline{\overline{X}}^{\,гр\,T} A_{23} \overline{\overline{Y}}^{\,гр} \right\}, \quad (9)$$

при ограничениях

$$E_{n'} q - A_{11} \widetilde{Y} - A_{12} \overline{Y} \le A_{13} \overline{\overline{Y}}^{\,гр}, \quad (10)$$

$$E_{m'}^T \widetilde{Y} + E_{m''-m'}^T \overline{Y} = 1 - E_{m-m''}^T \overline{\overline{Y}}^{\,гр}, \quad (11)$$

$$\overline{Y} \le \overline{Y}^{\,гр}, \ \widetilde{Y} \ge \overline{0}_{m'}, \ \overline{Y} \ge \overline{0}_{m''-m'}. \quad (12)$$

Рассмотрим пример. Пусть задана матрица обобщённых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 46 & 65 & 39 & 84 & 65 & 75 \\ 37 & 35 & 28 & 72 & 48 & 64 \\ 46 & 85 & 73 & 59 & 88 & 53 \\ 64 & 65 & 48 & 23 & 54 & 49 \end{pmatrix},$$

и ограничения для которых $n' = m' = 2$, $m'' = 4$, $\overline{\overline{X}}^{\,гр\,T} = (0{,}2 \quad 0{,}2)^T$, $\overline{Y}^{\,гр\,T} = (0{,}1 \quad 0{,}1)^T$, $\overline{\overline{Y}}^{\,гр\,T} = (0{,}1 \quad 0{,}2)^T$.

Тогда задачи (6)-(8) и (9)-(12) будут представлены в виде:
найти

$$f_1^*(s_0,s_1,s_2,\xi_1,\xi_2) = \min_{s_0,s_1,s_2,\xi_1,\xi_2} \{0{,}7s_0 + 0{,}1s_1 + 0{,}1s_2 + 21{,}5\xi_1 + 17{,}6\xi_2 + 6{,}92\}, (13)$$

при $s_0 - 46\xi_1 - 37\xi_2 \ge 22$, $s_0 - 65\xi_1 - 35\xi_2 \ge 30$, $s_0 + s_1 - 39\xi_1 - 28\xi_2 \ge 24{,}2$, $s_0 + s_2 - 84\xi_1 - 72\xi_2 \ge 16{,}4$, $\xi_1 + \xi_2 = 0{,}6$, $s_1, s_2, \xi_1, \xi_2 \ge 0$,
и найти

$$f_2^*(q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = \max_{q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4} \{0{,}6q + 22\eta_1 + 30\eta_2 + 24{,}2\eta_3 + 16{,}4\eta_4 + 6{,}92\} \quad (14)$$

при $q - 46\eta_1 - 65\eta_2 - 39\eta_3 - 84\eta_4 \le 21{,}5$, $q - 37\eta_1 - 35\eta_2 - 28\eta_3 - 72\eta_4 \le 17{,}6$, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 0{,}7$, $\eta_3 \le 0{,}1$, $\eta_4 \le 0{,}1$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \ge 0$.

В результате решения задач получим: $f_1^*(q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = f_2^*(q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = 54{,}0$, $s_0 = 51{,}0$, $s_1 = 0{,}0$, $s_2 = 8{,}6$, $\widetilde{X}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}6)^T$, $q = 45{,}8$, $\widetilde{Y}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}6)^T$, $\overline{Y}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}1)^T$.

Равенство целевых функций задач линейного программирования (13) и (14) являются признаком наличия седловой точки, а найденные смешанные стратегии определяют ситуацию равновесия.

В случае если $\overline{Y}^{\,гр\,T} = (1 \quad 1)^T$, т.е. при отсутствии статистической информации об интервалах неопределённости стохастического описания неопределённых факторов, в результате решения соответствующих задач получим: $f_1^*(q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = f_2^*(q,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = 59{,}2$, $s_0 = 59{,}6$, $s_1 = s_2 = 0{,}0$,

$\tilde{X}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}6)^T$, q=68, $\tilde{Y}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}0)^T$, $\overline{Y}^{*T} = (0{,}0 \quad 0{,}7)^T$. Т.е. значение игры увеличилось с 54,0 до 59,2.

Таким образом, учёт дополнительных ограничений позволяет снизить математическое ожидание обобщённых затрат в условиях примера на 9%, а полученное решение матричной игры с ограничениями полностью соответствует всем необходимым и достаточным условиям ситуации равновесия. Предложенная модель может быть применена для оптимизации алгоритма контроля СС в условиях сочетания случайных и неопределённых факторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Строцев А.А., Синицын С.В., Шухардин О.Н., Оганесян А.Л.* Применение смешанного расширения матричных игр "неклассического" типа в задачах определения технического состояния сложных систем. –Радиоэлектроника. Известия ВУЗов. Т. 50. 2007. №10. С 42–50.
2. *Строцев А.А., Синицын С.В., Кушнир М.А.* Применение матричных игр к задачам оптимизации программ контроля функционирования сложных систем на стадиях испытаний и начального периода эксплуатации. –Контроль. Диагностика. 2009. №1. С 51–57.
3. *Строцев А.А., Синицын С.В.* Применение методов теории принятия решений в условиях неопределённости при разработке системы поддержки принятия решения по поиску и устранению неисправностей сложных технических систем / Двойные технологии. 2009. №1. – С 15–21.
4. *Строцев А.А., Синицын С.В., Жадько А.А.* Методика теоретико-игровой оптимизации алгоритма контроля на основе модели смешанного расширения матричной игры с ограничениями. Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. №11. – С 66–70.
5. *Оуэн Г.* Теория игр: Изд. 3-е. – М.: Изд-во ЛКИ. 2000. –216 с.

Григорян Михаел Аветисович
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»
E-mail: kaf_sau@mail.ru
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мельчакова, 10
Тел.: +7(8632)696991

Строцев Андрей Анатольевич,
Ростовский военный институт ракетных войск
E-mail: kaf_sau@mail.ru

Оганесян Армен Левонович,
Ростовский военный институт ракетных войск
E-mail: kaf_sau@mail.ru

Grigoryan Michael Avetisovich
Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University»
E-mail: kaf_sau@mail.ru
10, Melchikova street, Rostov-on-Don, 344090
Phone: +7(8632)696991

Strotsev Andrey Anatolevich
Rostov military institute of Rocket Troops
Oganesjan Armen Levonovich
Rostov military institute of Rocket Troops
E-mail: kaf_sau@mail.ru