3. *Ромм Я.Е.* Параллельная сортировка слиянием по матрицам сравнений. II // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 4. – С. 13 – 37.
4. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. I // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 165 – 182.
5. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 161 – 174.
6. *Ромм Л.Я., Ромм Я.Е.* Целочисленная идентификация плоских контурных изображений на основе экстремальных признаков // Известия вузов. Технические науки», раздел «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2008. – №4. – С. 18 – 24.
7. *Ромм Я.Е., Рюмин О.Г.* Автоматическая идентификация плоских изображений по экстремальным признакам на основе сортировки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Прил. к № 1. – 2006. – С. 37 – 47.
8. *Ромм Л.Я., Ромм Я.Е.* Целочисленная идентификация плоских контурных изображений с учетом поворота, масштаба и искажений на основе экстремальных признаков / ТГПИ. – Таганрог, 2008. – 58 с. ДЕП в ВИНИТИ 28.01.2008, № 54 – В2008.
9. *Местецкий Л.М.* Скелетизация многоугольной фигуры на основе обобщенной триангуляции Делоне // Программирование. – 1999. – № 3. – С. 16 – 31.
10. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
11. *Тюшнякова И. А.* Разработка и исследование схем применения сортировки для поиска нулей и особенностей функций с приложением к идентификации плоских изображений. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. – 16 с.

**Ромм Леонард Яковлевич**
Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: romm@list.ru
347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48. Тел.: 88634 60-18-99

**Romm Leonard Yakovlevich**
Taganrog State Pedagogical Institute
E-mail: romm@list.ru
48, Initsiativnaia, Taganrog, 347936. Phone: 88634 60-18-99

УДК 519.6: 681.3

**Л.Н. Аксайская**

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ, ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

*Рассмотрены схемы таблично-алгоритмического вычисления функций на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Описана модификация схем для вычисления производных и определенных интегралов с сохранением свойств инвариантности относи-*

*тельно вида функции, устойчивости, параллелизма и минимальности временной сложности в условиях произвольно заданной границы погрешности.*

*Схемы; модификация; погрешность*

**L.N. Aksayskaya**

**PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS, DERIVATIVES AND INTEGRALS PARALLEL ALGORITHMS**

*Jabular-algorithmic computation of functions based on piecewise-polynomial approximation using the Newton interpolation polynomial schemes are considered. Schemes modification for the derivatives and definite integrals calculation with the properties invariant conservation relatively to the type of function, stability, parallelism and minimum time complexity under conditions of arbitrarily defined error boundary is deseribed.*

*Schemes; modification; deseribed.*

**Постановка задачи исследования.** При реализации основных алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС) необходимо вычислять элементарные функции. Объем и точность их вычисления в значительной мере влияют на быстродействие и точность ЦОС. К методам их вычисления предъявляются требования одновременно высокого быстродействия, вычислительной устойчивости, высокой точности аппроксимации и универсальности схем вычислений. В работе конструируется и анализируется таблично-алгоритмическая схема вычисления функций на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации функций с помощью интерполяционного полинома Ньютона, на этой основе аппроксимируются производные и интегралы.

Схема минимизации временной сложности таблично-алгоритмического вычисления функций на основе интерполяционного полинома Ньютона**.** Рассматривается функция одной действительной переменной вида

$$y = f(x), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

где промежуток $[a, b]$ произвольно фиксирован. Выбирается система непересекающихся подынтервалов равной длины, объединение которых совпадает с $[a, b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}), \quad x_{i+1} - x_i = (b-a)/P, \quad i = 0, 1, \ldots, P-1. \tag{2}$$

При априори заданной границе $\varepsilon$ абсолютной погрешности аппроксимации функции (1) и для каждого отдельно взятого подынтервала из (2) строится интерполяционный полином Ньютона степени *n*, где $n$ выбирается минимальным для достижения заданной точности приближения одновременно на всех подынтервалах. При этом полином Ньютона в общем случае преобразуется по дистрибутивности с приведением подобных так, что в результате преобразования на *i*-м подынтервале принимает канонический вид полинома от одной переменной:

$$P_n(x) = a_{0if} + a_{1if}x + a_{2if}x^2 + \ldots + a_{nif}x^n, \ x \in [x_i, x_{i+1}), \ i = 0, 1, \ldots, P-1 \ . \tag{3}$$

В (3) индекс коэффициента $i$ совпадает с номером подынтервала, индекс $f$ соответствует аппроксимируемой функции. Построение (3) выполняется для всех $P$ подынтервалов, чтобы на каждом из них не превышалась заданная граница погрешности

$$\left| f(x)-P_n(x) \right| \le \varepsilon\,,\quad x\in\left[x_i, x_{i+1}\right),\ \ i=0,1,\ldots,P-1\ . \tag{4}$$

В (3), (4) значение $n$ выбирается минимальным при условии, что оно одинаково для всех подынтервалов. Если такое $n$ найдено, то для функции (1) и для каждого подынтервала из (2) набор коэффициентов в (3) можно записать в память машины и сделать хранимым. В дальнейшем, когда потребуется вычислить функцию данного вида, вначале дешифрируется значение номера $i$ подынтервала, которое служит математическим адресом выборки коэффициентов (3), взаимно однозначно соответствующим данному номеру подынтервала. Если $x\in[x_i\,,\,x_{i+1})$, то $i=\operatorname{int}\left(\dfrac{x-a}{H}\right)$, где int – целая часть числа, $a$ – из (1), $H=x_{i+1}-x_i$. Порядок времени этой дешифрации оценивается как единичный $t=O(1)$. Если для рассматриваемой функции вычислить и хранить коэффициенты для всех подынтервалов, то в дальнейшем время вычисления функции зависит только от степени полинома (3). По схеме Горнера значение этого полинома вычисляется с временной сложностью $t(1)=n\left(t_y+t_c\right)$, где $t_c$, $t_y$– время бинарного сложения и умножения соответственно. За счет уменьшения длины подынтервала степень $n$ в (3) можно сделать «сколь угодно» малой (но целой) при соответственном возрастании $P$ в (2). После выборки $i$-го набора коэффициентов, время вычисления функции оказывается минимальным. С целью осуществления описываемого построения вычисление коэффициентов начинается для значения $n=1$ при минимальном значении $P$. В случае невозможности достижения заданной точности (4) значение $P$ удваивается; это продолжается до нарушения допустимых границ значений $P$; при их нарушении снова делается переход к минимальному значению $P$, но уже при $n=2$ и т.д.

В рамках интерполяции по Ньютону схема минимизации степени полинома детализируется следующим образом. Если границы i-го подынтервала из (2) обозначить как $a_{i\,0}$, $b_{i\,0}$, шаг интерполяции – $w_i=\dfrac{b_{i0}-a_{i0}}{n}$, то равностоящие узлы интерполяции на текущем шаге можно записать в виде $x_{i\,j}=a_{i0}+j\,w_i$ , $j=0,1,\ldots,n-1$. Полином Ньютона степени $n$ на i-м подынтервале для функции (1) и данных узлов интерполяции записывается в виде $\Psi_{ni}(x)=f(x_{i0})+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\Delta^j y_{i0}}{j!w_i^j}\prod\limits_{k=0}^{j-1}(x-x_{ik})$ , где $\Delta^j y_{i0}$ – конечная разность *j*-го порядка в точке $x_{i0}$, или, в обозначении $t=\dfrac{x-x_{i0}}{w_i}$,

$$\Psi_{ni}(t)=f(x_{i0})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta^j y_{i0}}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(t-k)\ . \tag{5}$$

Процесс приведения (5) к виду, аналогичному (3), влечет значения коэффициентов $a_{0if}=f(x_{i0})$, $a_{lif}=\sum\limits_{j=l}^{n}b_{ij}d_{lj}$, где $b_{ij}=\dfrac{\Delta^j y_{i0}}{j!}$, $d_{lj}$ –

коэффициенты полиномов вида $P_{nj}(t) = d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + ... + d_{nj}t^n$ с натуральными корнями, входящими в состав полинома Ньютона. Эти коэффициенты не зависят от вида аппроксимируемой функции, после вычисления их можно сделать хранимыми для всех использований интерполяции.

Процесс построения полинома на каждом подынтервале из (2) начинается с $n$=1, $P$=1. Проверка на заданную соотношением (4) точность аппроксимации (где $P_{ni}(x) = \Psi_{ni}(t)$) выполняется на каждом подынтервале в проверочных точках, взятых для независимой переменной $t$. Если во всех проверочных точках каждого из подынтервалов соотношение (4) не нарушено, то аппроксимация на всех подынтервалах при данном значении $P$ осуществима полиномом $P_{ni}(x) = \Psi_{ni}(t)$ при выбранном $n$. Нарушение (4) в какой-либо точке при сохранении того же значения $P$ требует увеличить степень полинома на 1, после чего весь процесс построения $\Psi_n$ и проверки его на точность аппроксимации заново повторяется на всех подынтервалах. В проверочных точках преобразованный полином Ньютона вычисляется по схеме Горнера

$$\Psi_n(t) = \left(\cdots\left(a_{nif}\,t + a_{(n-1)if}\right)t + a_{(n-2)if}\right)t + ... + a_{0if}\,. \qquad (6)$$

Значение (6) сравнивается непосредственно со значением исходно заданной функции $f(x)$. Результатом работы алгоритма окажется минимальное $n$ для каждого $P = 1, 2, 4, ...$.

Результаты программной реализации схемы даны в таблице. Во входном столбце таблицы $\varepsilon$ обозначает априори задаваемую границу погрешности. Во входной строке $k$ задает показатель степени $P = 2^k$ для количества подынтервалов из (2). На пересечении строки, содержащей $\varepsilon$, и столбца, содержащего $k$, указывается минимальное значение степени $n$ интерполяционного полинома Ньютона, при которой функция в заголовке таблицы аппроксимируется полиномом данной степени с точностью до $\varepsilon$ на каждом из $P$ подынтервалов. Пустующая клетка означает, что в используемой версии языка программирования граница погрешности $\varepsilon$ оказалась недостижимой для данного числа подынтервалов ни при одном значении $n$.

Таблица 1

Степени интерполяционного полинома Ньютона, аппроксимирующего функцию $y = \sqrt{arctg\left(e^{\sin\sqrt[3]{(1/x)}}\right)}$, $x \in [1/2, 1]$ по таблично-алгоритмической схеме

| $\varepsilon$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-4}$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-5}$ | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-6}$ | 6 | 5 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-7}$ | 8 | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-8}$ | 10 | 7 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-9}$ | 11 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-10}$ | | 9 | 7 | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $10^{-11}$ | | 11 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $\varepsilon$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-12}$ | | 12 | 9 | 7 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $10^{-13}$ | | | 9 | 8 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| $10^{-14}$ | | | 11 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $10^{-15}$ | | | 12 | 9 | 7 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $10^{-16}$ | | | 12 | 10 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| $10^{-17}$ | | | | 10 | 9 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| $10^{-18}$ | | | | | | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

Из таблицы видно, что аппроксимация функции $y=\sqrt{arctg\left(e^{\sin\sqrt[3]{(1/x)}}\right)}$ интерполяционным полиномом Ньютона, например, второй степени обеспечивает точность порядка $10^{-18}$.

Формула (5) для каждого $j=1,\,2,\,\ldots,\,n$ включает разложение полинома по целым корням $P_{jj}(t)=\prod_{k=0}^{j-1}(t-k)$, корни и, соответственно, коэффициенты которого не зависят от вида интерполируемой функции и номера подынтервала. Коэффициенты данного полинома (с помощью матричного видоизменения формул Виета [2]) можно вычислить наперед для произвольно фиксированного $j$, считать хранимыми в памяти компьютера и заданными без вычисления. Отсюда для параллельного перевода всего интерполяционного полинома Ньютона $\Psi_{ni}(t)$ в каноническую форму алгебраического полинома с заданными числовыми коэффициентами из (6) достаточно вычислить конечные разности $\Delta^j y_{i0}$ по максимально параллельной форме и затем привести подобные на основе дистрибутивности. Вычисление можно осуществить с помощью выражения конечных разностей через значения функции, описывающая следующим образом: $\Delta^j y_{i0}=y_{ij}-j\,y_{i(j-1)}+\frac{j(j-1)}{2!}y_{i(j-2)}-\frac{j(j-1)(j-2)}{3!}y_{i(j-3)}+\ldots+(-1)^j\,y_0$, при этом все биномиальные коэффициенты $C_\ell^j$ имеют априори известные значения. Достаточно параллельно умножить эти значения на узловые значения функции $y_{i(j-\ell)}$, затем выполнить алгебраическое сложение по схеме сдваивания. Временная сложность этой операции составит $t(r)=t_y+\left|\log_2 j\right|t_c$, где $t_y$, $t_c$ – время, соответственно, одного бинарного умножения и сложения, а количество процессоров $r=j$. Факториалы в знаменателях слагаемых выражения полинома $\Psi_{ni}(t)$ можно считать априори присоединенными к биномиальным коэффициентам. Остается вычисленные значения коэффициентов параллельно умножить на хранимые коэффициенты полиномов $P_{jj}(t)$ и привести подобные при равных степенях. Временная сложность описанного параллельного алгоритма составит $T(R)=t_y+\left|\log_2 n\right|t_c$ на одном подынтервале, $R$ здесь и ниже – количество процессоров, в данном случае $R=n(n-1)/2$. При параллельном вычислении одновременно по всем $P$ подынтервалам

$$T\left(Pn^2/2\right)=t_y+\left\lceil\log_2 n\right\rceil t_c. \tag{7}$$

При расчете минимального $n$ процесс сравнения можно выполнять параллельно по всем проверочным точкам и одновременно для всего множества рассматриваемых степеней $n$, что увеличит число процессоров пропорционально числу проверочных точек, умноженному на число подынтервалов и на количество проверяемых показателей $n$. Это сохранит максимальный параллелизм алгоритма минимизации временной сложности таблично-алгоритмической схемы вычисления функций. Формально максимально параллельная схема выполнения рассматриваемого алгоритма минимизации сохраняться для всего набора одновременно задаваемых границ $\varepsilon$ погрешности аппроксимации функций.

Таким образом, предложенная схема минимизации временной сложности обладает максимальным параллелизмом, временная сложность которого оценивается на базе (7) с учетом последних замечаний. Аналогичная оценка не достигается для полинома Лагранжа, где разложение по корням зависит от выбора узлов интерполяции, при этом на практике не достигается точность аппроксимации полинома Ньютона. Данная оценка не достигается для полинома Тейлора, поскольку его коэффициенты должны быть аналитически определяемыми производными в различных точках, причем на практике при равной точности аппроксимации полином Ньютона обладает преимуществом универсальности (полиномы Лагранжа и Тейлора рассматриваются в контексте использования в (3) взамен полинома Ньютона).

**Оптимизированная схема таблично-алгоритмического вычисления производных и определенных интегралов на основе интерполяции по Ньютону.** Схема, описанная выше, модифицируются для вычисления производных и определенных интегралов с сохранением свойств инвариантности относительно вида функции, устойчивости, параллелизма и минимальности временной сложности в условиях произвольно заданной границы погрешности [1].

При интерполяции по Ньютону $f(x) \approx \Psi_{ni}(t)$, где $\Psi_{n\,i}(t)$ из (6). Отсюда $f'(x) \approx \Psi'_{ni}(t)_x$. При $t = \dfrac{x - x_{i0}}{w_i}$ получится $f'(x) \approx (\Psi_{ni}(t))'_t\, t'_x$. Очевидно, $(\Psi_{ni}(t))'_t = a_{1if} + 2a_{2if}t + 3a_{3if}t^2 + ... + n\, a_{nif}t^{(n-1)}$, где $t'_x = \dfrac{1}{w_i}$. Значение $\Psi'_{n\,i}(t)$ вычисляется по схеме Горнера, на основании которой

$$f'(x) \approx \Big(\Big(\cdots\Big(n\,a_{nif}t + (n-1)\,a_{\,(n-1)if}\Big)t + \cdots + 2\,a_{\,(n-2)if}\Big)\,t + a_{1if}\Big)\frac{1}{w_i}\,.$$

Оценки погрешности аппроксимации производной функции по сравнению с аналитическим выражением характерны для приводимой ниже табл. 2 в случае различных функций на произвольных промежутках (смысл $n$ и $k$ тот же, что в табл. 1):

Таблица 2

Погрешность вычисления производной функции $f(x)=\sin(x)$,

$[a,\ b]=\left[1, \frac{3}{2}\right]$ на основе полинома Ньютона степени $n$

| $n$ | $k$ | Погрешность вычисления Функции | Погрешность вычисления Производной |
|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 5,421*10$^{-20}$ | 9,048*10$^{-17}$ |
| … | … | … | … |
| 4 | 15 | 5,421*10$^{-20}$ | -2,927*10$^{-18}$ |

Существенно, что функция и производная могут вычисляться одновременно. Для наперед известной функции, например при построении библиотеки стандартных подпрограмм, коэффициенты аппроксимирующего полинома могут быть хранимыми для каждого подынтервала. В этом случае производная будет вычисляться за время нескольких сложений и умножений, поэтому временная сложность вычисления стандартной функции и одновременно производной от нее оценивается как $T=O(1)$.

Вычисление интеграла от функции (1) на промежутке $[a,b]$ по аддитивности влечет $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{P-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, где $[x_i, x_{i+1})$ из (2). Для $i$-го подынтервала справедливо $f(x)\approx P_{ni}(x)$,где $P_{n\,i}(x)$ из (4). Отсюда $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(x)dx$. В свою очередь, $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{P-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(x)dx$. Для интерполяции по Ньютону используется замена переменной $w_i=\frac{b_{i0}-a_{i0}}{n}$. При ее выполнении значениям $x=x_i$ и $x=x_{i+1}$ соответствуют $t=0$ и $t=n$. С учетом $P_{n\,i}(x)=\Psi_{n\,i}(t)$, где $\Psi_{n\,i}(t)$ из (6), получится $P_{n\,i}(x)dx=w_i\Psi_{ni}(t)dt$. В результате $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(x)dx = w_i\int_0^n \Psi_{ni}(t)\,dt$. Интеграл в правой части вычисляется непосредственно: $w_i\int_0^n \Psi_{n\,i}(t)dt=w_i\,\tilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(t)\Big|_0^n$,

где $\tilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(t) = c+\frac{a_{0if}}{1}t+\frac{a_{1if}}{2}t^2+\frac{a_{2if}}{3}t^3+...+\frac{a_{nif}}{n+1}t^{n+1}$. Для минимальной степени $n$ интерполирующего функцию полинома и соответствующего числа подынтервалов строится приближение определенного интеграла функции. После элементарных преобразований $w_i\int_0^n \Psi_{n\,i}(t)dt=w_i\,\tilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n)$. Значения $\tilde{\Psi}_{(n+1)\,i}(n)$ вычисляются по схеме Горнера:

$$\tilde{\Psi}_{(n+1)i}(n)=\left(...\left(\left(\frac{a_{nif}}{n+1}n+\frac{a_{(n-1)if}}{n}\right)n+\frac{a_{(n-2)if}}{n-1}\right)n+\cdots+\frac{a_{0if}}{1}\right)n.$$

В результате $\int_a^b f\left(x\right)dx \approx \sum_{i=1}^{P-1} w_i \tilde{\Psi}_{(n+1)i}(n)$. Данное соотношение строится для минимизирующего значение показателя $n$ алгоритма таблично-алгоритмической аппроксимации. Выбор такого $n$, как показывает эксперимент, оказывается достаточным для достижения наперед заданной точности вычисления определенного интеграла. Проверка достигнутой границы погрешности осуществлялась сравнением с точными значениями интегралов на основе первообразных. В среднем по различным значениям $n$ таблично-алгоритмическая схема на основе полинома Ньютона превышает точность формулы трапеций и метода Симпсона.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. – 20 с.
2. *Ромм Я.Е.* Параллельные итерационные схемы линейной алгебры с приложением к анализу устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – Киев, 2004. – № 4. – С. 119-142.

**Аксайская Любовь Николаевна**
Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: lubov1201@yandex.ru
347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48. Тел.: 88634 60-18-99

**Aksayskaya Lyubov Nikolaevna**
Taganrog State Pedagogical Institute
E-mail: lubov1201@yandex.ru
48, Initsiativnaia, Taganrog, 347936. Phone: 88634 60-18-99

УДК 622.333

**С.А. Морозов, В.Г. Манжула, С.В. Федосеев, А.Ю. Аликов**

# МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФОРМАЛИЗАЦИИ СЛОЖНОСТИ СТРУКТУР

*В статье рассмотрено совершенствование методов синтеза систем управления с импульсным воздействием при формализации сложности и исключения избыточности структур. В результате выполненной формализации анализируемая задача сводится к задаче поиска простых структур с частично линейными ограничениями.*

*Синтез; формализация; структура; системы управления; управляющие воздействия.*