

Джанунц Гарик Апетович
E-mail: janunts@inbox.ru
Тел: 8- 918-506-90-24

Romm Yakov Evseevich
Taganrog State Pedagogical Institute
E-mail: romm@List.ru
48, Initsiativnaia, Taganrog, 347936. Phone: 88634 60-18-99

Dzhanunts Garik Apetovich
E-mail: janunts@inbox.ru
Phone: 8- 918-506-90-24

УДК 517.91: 518.1

Я.Е. Ромм, С.Г. Буланов

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К
ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА**

Изложен метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных ОДУ, определяющий необходимые и достаточные условия устойчивости при ограничениях общего вида на основе разностных схем. Представлены результаты компьютерного моделирования устойчивости систем и численный эксперимент применительно к анализу устойчивости синхронного генератора, работающего на сеть большой мощности. Анализ реализуется на персональном компьютере в режиме реального времени.

Метод; анализа; время.

Ya.E. Romm, S.G. Bulanov

**THE COMPUTER ANALYSIS OF A STABILITY OF SYSTEMS OF LINEAR
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATION TO AN ESTIMATION
STABILITIES OF THE SYNCHRONOUS GENERATOR**

The method of the computer analysis of a stability of an ODE linear systems, defining necessary and sufficient conditions for stability is stated at restrictions of a general view on the basis of difference schemes. Outcomes of computer modelling of a stability of systems and numerical experiment with reference to the analysis of a stability of the synchronous generator working on a web of the big potency are presented. The analysis is realised on the personal computer in a condition of real time.

Method; analysis; time.

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где Y – вектор-функция, координаты которой – искомые функции y_1, y_2, \dots, y_n от независимой переменной t ; $A(t)$ – матрица коэффициентов, $n \times n$. Предполагается, что все функции $a_{ij}(t)$ $i, j = 1, \dots, n$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t]$, при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$; $Y(t_0) = Y_0$ – начальный вектор. Всюду ниже используется каноническая норма матрицы $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ и согласованная с ней норма вектора $\|Y\| = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|$. Предполагается, что для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения на $[t_0, \infty)$. Эти же условия предполагаются выполненными для каждого элемента множества возмущённых решений $\tilde{Y} = \tilde{Y}(t)$, соответствующих возмущённому начальному вектору $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, по крайней мере, для некоторого $\delta > 0$ и любых \tilde{Y}_0 , таких, что

$$\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta. \quad (2)$$

Пусть R обозначает область, включающую множество всех решений задачи (1) при начальных значениях, удовлетворяющих (2),

$$R: \{ t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t): \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta \}. \quad (3)$$

В области (3) требуется исследовать решение задачи (1) на устойчивость в смысле Ляпунова. Традиционное определение устойчивости заимствовано из [1] с упрощениями [2] на случай рассматриваемого множества R .

В данных условиях для $\forall T \in [t_0, \infty)$ на отрезке $[t_0, T]$ выполнено:

- 1) $\|A(t)\| \leq c$, где $c = \text{const}$ зависит от T ;
- 2) если $f_k(t_i, Y_i) = a_{k1}(t_i)y_{1(i)} + \dots + a_{kn}(t_i)y_{n(i)}$, то $|f'_k(t, Y(t))| \leq c_1$, $|f'_k(t, \tilde{Y}(t))| \leq c_1$, где $c_1 = \text{const}$ зависит от T и \tilde{Y}_0 , $k = 1, \dots, n$.

Метод Эйлера приближённого решения системы (1) имеет вид $Y_{i+1} = Y_i + hA(t_i)Y_i$, $i = 0, 1, \dots$, или

$$Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i, \quad (4)$$

где h – равномерный шаг.

В дальнейшем при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, h и i всегда предполагаются связанными следующими соотношениями:

$$t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Для возмущённого решения соотношение (5) переходит в соотношение

$$\tilde{Y}_{i+1} = (E + hA(t_i))\tilde{Y}_i, \quad (6)$$

где $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, \tilde{Y}_0 из (2). При этом всюду ниже предполагается, что $\tilde{Y}(t)$ не выходит из множества R , в частности, $\tilde{Y}(t)$ удовлетворяет (3).

Для возмущения с учетом остаточного члена на каждом шаге получим [2]:

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_i - Y_i) + Q_{Ei}, \quad (7)$$

где $\|Q_{E i}\| \leq c_1 h^2$, $c_1 = \text{const}$ [2]. Рекуррентное преобразование (7) влечёт

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) + L_i, \quad (8)$$

где

$$L_i = \sum_{k=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-k} (E + h A(t_{i-\ell})) Q_{E k-1} + Q_{E i}. \quad (9)$$

Лемма 1. В рассматриваемых условиях имеет место соотношение

$$L_i = O(h). \quad (10)$$

Доказательство леммы приводится в [2, 3]. Отсюда вытекает

Следствие 1. В условиях леммы 1 имеет место равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_i = \vec{0}. \quad (11)$$

Предельный переход в равенстве (8) при любом t из (5) влечет равенство

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{h \rightarrow 0} L_i.$$

Стремление h к нулю равносильно стремлению i к бесконечности. Отсюда, с учётом (11) для любого $t \in [t_0, \infty)$ выполнено

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0). \quad (12)$$

Шаг h в (12) зависит от i : $h(i) = \frac{t-t_0}{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$, поэтому бесконечное

произведение (12) строится как последовательность частичных произведений, каждое из которых отличается от предыдущего не только добавлением нового множителя, но и уменьшением в обратной пропорции количеству множителей параметра h в каждом из множителей нового частичного произведения.

Практическая программная реализация условий устойчивости будет выполняться с постоянным шагом на фиксированном промежутке. Это делается по двум причинам: во-первых, экспериментально не обнаруживается разница результатов моделирования при изменении шага в наборе множителей, во-вторых, постоянство шага принципиально сокращает время моделирования.

Из (12) вытекает:

Теорема 1. Чтобы в рассматриваемых условиях решение задачи (1) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c}_1 = \text{const} \quad (13)$$

для $\forall t \in [t_0, \infty)$. Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (13) и, кроме того, имеет место соотношение

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + h A(t_{i-\ell})) \right\| \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Мультипликативная форма выражений под знаком предела предоставляет возможность запрограммировать их вычисление в виде цикла по числу матричных сомножителей. Это влечет возможность компьютерного анализа устойчивости по значению нормы текущего произведения матриц из левой части.

Если матрица A в (1) не зависит от времени то условия (13), (14), соответственно, примут вид:

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} B^{i+1} \right\| \leq \tilde{C}_1 = \text{const} \quad (15)$$

для $\forall t \in [t_0, \infty)$, где $B = E + hA$, $i+1 = 2^k$,

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} B^{i+1} \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В этом случае условия устойчивости отличаются тем, что не требуют информации о характеристическом многочлене матрицы и о его корнях.

Условия устойчивости, аналогичные (13), (14), строятся и на основе разностных методов более высокого порядка [2]. В частности, для метода Эйлера–Коши имеет место аналог условий (13), (14) [2, 3].

решение задачи (1) устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(E + \frac{h}{2} (A(t_{i-\ell}) + A(t_{i-\ell} + h)(E + hA(t_{i-\ell}))) \right) \right\| \leq \tilde{C}_2 = \text{const} \quad (16)$$

для $\forall t \in [t_0, \infty)$. Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (16) и, кроме того, имеет место соотношение

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(E + \frac{h}{2} (A(t_{i-\ell}) + A(t_{i-\ell} + h)(E + hA(t_{i-\ell}))) \right) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

При использовании метода Рунге–Кутты условия устойчивости примут вид:

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(E + \frac{h}{6} (P_{1i-\ell} + 2P_{2i-\ell} + 2P_{3i-\ell} + P_{4i-\ell}) \right) \right\| \leq \tilde{C}_3 = \text{const}, \text{ для } \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(E + \frac{h}{6} (P_{1i-\ell} + 2P_{2i-\ell} + 2P_{3i-\ell} + P_{4i-\ell}) \right) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ где}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{1i} &= A(t_i), \\ P_{2i} &= A(t_i + \frac{h}{2})(E + \frac{h}{2}A(t_i)), \\ P_{3i} &= A(t_i + \frac{h}{2})(E + \frac{h}{2}A(t_i + \frac{h}{2})(E + \frac{h}{2}A(t_i))), \\ P_{4i} &= A(t_i + h)(E + hA(t_i + \frac{h}{2})(E + \frac{h}{2}A(t_i + \frac{h}{2})(E + \frac{h}{2}A(t_i))))). \end{aligned} \right\}$$

Использование данных условий обеспечивает более высокую достоверность анализа устойчивости при более существенных ограничениях на функции (1) [2, 3].

Моделирование устойчивости в условиях теоремы 1 проводится на Delphi 7. При накоплении частичного произведения на каждом шаге цикла вычисляется и через некоторое количество шагов k выводится на печать норма текущего значения произведения.

```

program Stability_Ejler;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
const h=0.000001; n=4; t0=0; TT=100;
type matr=array[1..n,1..n] of extended;
var A,B,C:matr; i,j,l:integer; t,s,s0,norma:extended;
k:longint; s01:array[1..n] of extended;
procedure matrinput (t:extended;var A:matr);
begin
a[1,1]:=0; a[1,2]:=1; a[1,3]:=cos(t); a[1,4]:=sin(t);
a[2,1]:=-1; a[2,2]:=0; a[2,3]:=sin(t); a[2,4]:=-
cos(t);
a[3,1]:=-cos(t); a[3,2]:=-sin(t); a[3,3]:=0; a[3,4]:=1;
a[4,1]:=-sin(t); a[4,2]:=cos(t); a[4,3]:=-1 a[4,4]:=0;
end;
procedure metod_E (var A:matr);
begin
matrinput (t,A);
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
begin a[i,j]:=h*a[i,j]; if i=j then a[i,j]:=a[i,j]+1; end;
end;
procedure norma_s;
begin
for i:=1 to n do
begin s0:=0; for j:=1 to n do s0:=s0+abs(a[i,j]);
s01[i]:=s0; end;
norma:=s01[1]; for i:=2 to n do
if s01[i]>norma then norma:=s01[i];
end;
begin
t:=t0; k:=0; metod_E (A); repeat t:=t+h; metod_E (B);
for i:=1 to n do for j:=1 to n do begin
s:=0; for l:=1 to n do s:=s+a[i,l]*b[l,j]; c[i,j]:=s; end;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do a[i,j]:=c[i,j]; norma_s;
k:=k+1; if k>=1250000 then begin write(norma:20); k:=0;
end
until t>=TT; writeln; for i:=1 to n do begin for j:=1 to n
do write(' ',a[i,j]:20); writeln;
end; readln; end.

```

Приближение к $\prod_{i=0}^{\infty} (E+hA(t_i))$ реализуется так, что шаг h не стре-

мится к нулю, а берется достаточно малым и фиксированным. Как показал эксперимент, при этом сохраняется достоверность моделирования устойчивости.

Пример 1. Дана система уравнений [4]:

$$\begin{cases} x_1' = & + x_2 + x_3 \cos t + x_4 \sin t, \\ x_2' = -x_1 & + x_3 \sin t - x_4 \cos t, \\ x_3' = -x_1 \cos t - x_2 \sin t + & + x_4, \\ x_4' = -x_1 \sin t + x_2 \cos t - x_3. \end{cases}$$

Нулевое решение этой системы устойчиво [4], но не асимптотически как слева, так и справа – в силу ограниченности решения на $[t_0, \infty)$ и на $(-\infty, t_0]$.

Результаты работы программы Stability_Ejler следующим образом отражают этот ожидаемый результат:

1.8060 1.6695 1.8499 1.9344 1.6324 1.7364 1.4973 1.7628 1.4162 1.5230
1.6788

.....
.....
1.4056 1.8337 1.4703 1.4526 1.6665 1.7839 1.5841 1.7526 1.6986 1.8427
1.6939

Колесание значений нормы на рассматриваемом промежутке ограничено константой. В соответствии с критерием (13) система устойчиво справа.

С другой стороны, компьютерный анализ устойчивости слева влечет:

1.8060 1.6695 1.8499 1.9344 1.6324 1.7364 1.4973 1.7628 1.4162 1.5230
1.6788

.....
.....
1.4056 1.8337 1.4703 1.4526 1.6665 1.7839 1.5841 1.7526 1.6986 1.8427
1.6939

Значения нормы ограничены, что в соответствии с критерием (13) означает устойчивость решения слева.

В случае постоянства матрицы A процесс нахождения частичного произведения ускорится, если вместо перемножения матриц B возводить в квадрат произведение на текущем шаге. Если в (15) положить $i+1=2^k$, то степень B^{2^k} находится путём k умножений матрицы на себя. Таким образом, $k = \log_2(i+1)$.

Ниже приводится система линейных ОДУ, моделирующая работу синхронного генератора работающего на сеть большой мощности [2, 3].

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{E}'_{q2} \\ \dot{E}'_{d2} \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{E}'_{q3} \\ \dot{E}'_{d3} \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\delta}_{12} \\ \dot{\delta}_{13} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} -0.5610D_1 & 0.6793 & 0.6099 & 0 & 0.4948 & 0.5463 & 0 & -0.9520 & -0.7494 \\ 0 & -13.7658 & 1.4409 & 0 & 3.6163 & 1.1781 & 0 & 8.5472 & -3.3161 \\ 0 & -15.5076 & -150.1554 & 0 & -12.6793 & 38.9205 & 0 & 42.4023 & -21.4333 \\ 0 & -6.5352 & -1.1714 & -2.0723D_2 & 0.9552 & 2.2156 & 0 & 5.4592 & -2.3385 \\ 0 & 5.6334 & 0.4076 & 0 & -16.5675 & 1.4111 & 0 & -4.2309 & 10.1170 \\ 0 & -3.8073 & 52.6270 & 0 & -13.1829 & -156.9117 & 0 & -38.8349 & 68.5987 \\ 0 & 2.9781 & 3.9766 & 0 & -10.6238 & -4.7247 & -4.4063D_3 & -5.2010 & 10.7116 \\ 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ E'_{q2} \\ E'_{d2} \\ \omega_2 \\ E'_{q3} \\ E'_{d3} \\ \omega_3 \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \end{pmatrix}$$

Результаты анализа устойчивости исследуемой системы для случая $D_1 = D_2 = D_3 = 1.0$ о.е. на промежутке $[0, 10^9]$ с шагом $|h| = 10^{-14}$ имеют вид:

3.8E+0000 6.6E+0000 1.2E+0001 2.3E+0001 4.4E+0001 7.7E+0001
8.5E+0001

.....
.....
72.4E-0127 2.0E-0254 4.3E-0509 5.8E-1018 3.8E-2036 2.1E-4072
0.0E+0000

В соответствии с условиями устойчивости результат трактуется как асимптотическая устойчивость.

Для случая $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ на промежутке $[0, 10^9]$ с шагом $|h| = 10^{-14}$:

1.1E+0000 1.2E+0000 1.4E+0000 1.7E+0000 2.4E+0000 3.8E+0000 6.6E+0000

.....
.....
7.7E+0001 4.6E+0001 4.7E+0001 4.2E+0000 3.0E+0000 1.3E+0000
1.4E+0000

Ограниченное колебание значений нормы в соответствии с условием (15) соответствует неасимптотической устойчивости.

Анализ устойчивости данной системы выполняется за 0,1 с на Delphi 7, персональный компьютер Pentium 4 [2, 3]. Согласно приводимой таблице анализ может осуществляться в реальном времени для матриц большой размерности (табл. 1).

Таблица 1

Время компьютерного анализа устойчивости систем большой размерности

Размерность матрицы	9 × 9	18 × 18	36 × 36	72 × 72	144 × 144	288 × 288
Время выполнения программного анализа	0,1 с	0,3 с	1 с	3 с	7 с	60 с

Необходимо принять во внимание возможность адаптации программы к параллельной вычислительной системе. Ядро программы включает лишь умножение текущей матрицы самой на себя. Умножение матриц обладает естественным параллелизмом, известная оценка максимально параллельного умножения пары матриц имеет вид $T(n^3) = O(\log_2 n)$. Число умножений в данной программе определяется как $m = 2^k$, где m таково, что в результате покрывается весь промежуток $[t_0, T]$ приближенного решения системы по методу Эйлера. Иными словами $m \cdot h = T - t_0$. Отсюда следует, что с точностью до целого $k = \log_2 \left(\frac{T - t_0}{h} \right)$. В итоге, временная сложность рассматриваемого анализа в максимально параллельной форме без учета обмена составит $T(n^3) = O(\log_2 n) \times \log_2 \left(\frac{T - t_0}{h} \right)$.

Таким образом, представленная схема анализа устойчивости обладает существенным быстродействием.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 478 с.
2. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений / ТГПИ. – Таганрог, 2009. – 119 с. ДЕП в ВИНТИ 30.04.09. № 268 – В2009.
3. *Буланов С.Г.* Разработка и исследование методов программного моделирования устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем / Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Таганрог: ТРТУ, 2006. – 232 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 534 с.

Ромм Яков Евсеевич

Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: romm@List.ru
347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48. Тел: 88634 60-18-99

Буланов Сергей Георгиевич

E-mail: romm@List.ru
Тел: 8-909-43-69-543

Romm Yakov Evseevich

Taganrog State Pedagogical Institute
E-mail: romm@List.ru
48, Initsiativnaia, Taganrog, 347936. Phone: 88634 60-18-99

Bulanov Sergei Georgievich

E-mail: romm@List.ru
Phone: 8-909-43-69-543

УДК 681.51

В.В. Соловьев, В.И. Финаев

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Выполнена классификация неопределенностей в условиях функционирования сложной системы. Показано применение принципа адаптации для управления системой, выполнена постановка задачи и определены этапы ее решения.

Неопределенность; адаптация.