3. *Нахушев А.М., Нахушева В.А., Сербина Л.И.* О некоторых прикладных аспектах дробного исчисления. Тезисы докладов Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков на вещество». Терскол, 1999.
4. *Caputo M.* Elasticita e Dissipazione.– Zanichelli, Bologna, 1969.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения.– М.:Наука, 1969.

Афонин Анатолий Андреевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге
E-mail: nikitina.vm@gmail.com
347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44
Тел.: 8(8634) 37-16-06

Afonin Anatoliy Andreevich
Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”
E-mail: nikitina.vm@gmail.com
44, Nekrasovsky, GSP 17A, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634) 37-16-06

УДК 534.29:551.594.25

А. А. Афонин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОМИГРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В данной статье представлены математические модели геомиграции загрязнений в грунтовых водах в классической постановке, а также в почвах, обладающих фрактальной структурой.

Геомиграция; смесь; грунтовые воды; фрактальные структуры.

A. A. Afonin

MATHEMATICAL MODELS OF GEOMIGRATION IN POROUS MEDIA WITH FRACTAL STRUCTURE

In this study are presented mathematical models geomigration of contaminations with groundwater in classical way and in soils with fractal structures.

Geomigration; mixture; groundwater; fractal structures.

При мелиорации земель, проектировании и строительстве гидротехнических сооружений, в вопросах охраны окружающей среды, вопросах защиты территорий от подтопления, в вопросах строительства и эксплуатации водозаборных скважин важное значение играют геофильтрация и геомиграция водорастворимых веществ, в частности солей, в почве и грунтах.

При исследовании подземных вод важным является такой расчет работы водозаборных скважин, при котором они не загрязнялись бы промышленными стоками, сбрасываемыми в грунт или подземные хранилища в районе водозабора. При работе водозаборных скважин в районе морских побережий, засоленных озер и солончаков существенно, чтобы водозабор не засорялся. Очевидно, что форма границ области загрязнения влияет на условия работы водозабора.

Грунтовые воды всегда содержат то или иное количество растворимых солей. Некоторое количество солей находится в грунте в твердой фазе, они могут быть сорбированными на частицах грунта и десорбироваться с их поверхности или быть рассеянными внутри пор. Имеет место то или иное первичное засоление почв и грунтов, в результате ирригации наблюдается вторичное засоление. Оно объясняется тем, что при подъеме грунтовых вод, когда они приблизятся к поверхности земли на достаточно близкое расстояние (обычно меньшее трех метров), испарение с их поверхности становится особенно интенсивным, и соли выносятся в верхние слои грунта и на его поверхность. При этом снижается плодородие почвы, а через некоторый промежуток времени она может стать совсем бесплодной. Поэтому вопросы прогноза водно-солевого режима почв и грунтов имеют весьма важное значение.

Считаем пористую среду, в которой происходит фильтрация, недеформируемой; будем пренебрегать силами инерции, вызывающими конвективное ускорение, силами вязкого трения внутри жидкости; будем пренебрегать молекулярной диффузией, вызываемой градиентом температуры. Тогда для фильтрации неоднородной жидкости, являющейся смесью двух компонент уравнение для фильтрации одной компоненты в смеси имеет вид

$$m\frac{\partial(\rho c)}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}\cdot\rho c)=\nabla(\rho D\nabla\cdot c), \tag{1}$$

где $\rho=\rho(c)$ – плотность смеси; $m=m(\mathbf{x})$ – пористость среды; $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ – скорость фильтрации (смеси); $D=D(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии.

Если в уравнении (1) пренебречь инерционными членами $(\rho=const)$, уравнение (1) можно переписать в виде

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\nabla\cdot(D\cdot\nabla c)-(\mathbf{v}\cdot\nabla)c. \tag{2}$$

К уравнению (2) присоединяем закон Дарси и уравнение неразрывности:

$$\mathbf{v}=k(\mathbf{x})\nabla\varphi,\quad \nabla\mathbf{v}=0, \tag{3}$$

где φ – обобщенный потенциал фильтрации ($\varphi=-k_0h$ в случае профильной фильтрации; $\varphi=-k_0Th$ в случае плановой напорной фильтрации; $\varphi=-\frac{1}{2}k_0h^2$ в случае плановой напорной фильтрации со свободной поверхностью, где h – пьезометрический напор; T – мощность водопроницаемого пласта; k_0 – характерный размер); $k(\mathbf{x})$ – коэффициент фильтрации.

В принципе, все задачи геофильтрации (или геомиграции) являются трехмерными. Однако во многих практических случаях фильтрационные течения таковы, что течениями в одном из трех координатных направлений можно пренебречь, и исследовать фильтрацию в двух других направлениях.

Плановые задачи геомиграции

Для незначительных по толщине и больших по простиранию водоносных пластов можно предположить, что градиенты давления, а, следовательно, и фильтрация в направлении Oz пренебрежимо мала по сравнению с фильтрацией в двух других направлениях. Все величины, входящие в уравнения геомиграции (2)-(3) представляют собой усредненные тем или иным способом по оси Oz величины. Гравитационные члены, входящие в уравнение, считаются равными нулю.

Уравнения (2)-(3) для плановой геомиграции перепишутся в следующем виде:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial c}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}=k(x,y)grad\varphi,\quad \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial \mathrm{y}}=0. \tag{5}$$

Профильные задачи геомиграции

Пренебрегая фильтрацией в одном из горизонтальных направлений вместо вертикального, получим модель, которую называют *профильной*.

Этот вид можно использовать в тех случаях, когда фильтрация происходит преимущественно в вертикальном и одном из горизонтальных направлений. Величины, входящие в уравнения, представляют собой усредненные тем или иным способом по оси 0у величины.

Уравнения (2)-(3) для профильной геофильтрации можно записать в следующем виде:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_z\frac{\partial c}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\mathbf{v}=k(x,z)grad\varphi,\quad \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}=0. \tag{7}$$

Радиальные течения

К таким течениям относятся фильтрационные течения с одной скважиной (водозаборной или нагнетательной). В этом случае фильтрация вблизи скважин также является двумерной функцией. Входящие в уравнения геомиграции, представляют собой усредненные тем или иным способом по координате φ величины.

В настоящее время значительный интерес представляет разработка математических моделей геомиграции, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на движение загрязнений в потоке грунтовых вод и на их водно-солевой режим.

Установлено [1], что почвогрунт имеет фрактальную структуру. В настоящее время разработаны методы, позволяющие наблюдать коллоидные структуры непосредственно в почвах, получить информацию о фрактальной размерности почв [2]. Учет этого фактора принципиально меняет уравнения геомиграции, превращая их в дифференциальные уравнения дробного порядка с коэффициентом.

Для плановой геомиграции перепишем уравнение (4) с учетом коэффициента фрактальной диффузии члена, учитывающего содержание солей в твердой фазе:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial y}\right)-\mathrm{v}_x\frac{\partial c}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial c}{\partial y}+\beta(c_m-c), \tag{8}$$

где β – коэффициент растворимости; c_m – предельная концентрация насыщения; D_f – коэффициент фрактальной диффузии.

Если рассматриваются хорошо растворимые соли, коэффициент растворимости β мал и членом $\beta(c_m-c)$ можно пренебречь.

Вводя D_{ot}^{β} и ∂_{ot}^{α} – операторы дробного интегродифференцирования порядка $|\beta|$ Римана-Лиувилля и M. Caputo порядка α [3], имеем аналог уравнения (8):

$$m\partial_{ot}^{\alpha}c(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial y}\right)-V_x\frac{\partial c}{\partial x}-V_y\frac{\partial c}{\partial y}+\beta(c_m-c),\tag{9}$$

где

$$\partial_{ot}^{\alpha}c(x,y,t)=D_{ot}^{\alpha-1}\frac{\partial c(x,y,\tau)}{\partial\tau}.\tag{10}$$

Для профильной геомиграции перепишем уравнение (6) в виде

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_f\frac{\partial c}{\partial z}\right)-V_x\frac{\partial c}{\partial x}-V_z\frac{\partial c}{\partial z}+\beta(c_m-c).\tag{11}$$

Учитывая, что движение примесей происходит преимущественно вдоль оси $0z$, заменим соответствующие производные по z в уравнении (11) производными дробного порядка:

$$m\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_\xi\frac{\partial c}{\partial x}\right)+D_f\partial_{0z}^{\alpha}c(x,\xi,t)-V_x\frac{\partial c}{\partial x}-D_{0z}^{\alpha-n}\frac{\partial u(x,\xi,t)}{\partial\xi}+\beta(c_m-c),\tag{12}$$

где $\partial_{ox}^{\alpha}c(x,\xi,t)=D_{0x}^{\alpha-n}\dfrac{\partial^n c(x,\xi,t)}{\partial\xi^n}$, $\qquad n-1<\alpha\le n=1{,}2$.

Одномерные классические профильные задачи вертикальной геомиграции солей, вытекающие из уравнения (6), были рассмотрены в работе [4]. Соответствующие уравнения, описывающие одномерную вертикальную геомиграцию с учетом фрактальной структуры грунтов, были рассмотрены в работе [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Федотов Г. Н., Третьяков Ю. Д., Иванов В. К., Куклин А. Н., Пахомов Е. Н., Исламов А. Х., Початкова Т. Н.* Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов // ДАН. 2006. Т409. 2.
2. *Сербина Л. И.* Об одной математической модели переноса субстанции во фрактальных средах // Математическое моделирование. 2003. Т15. 9.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.
5. *Беданокова С. Ю.* Математическое моделирование солевого режима почв с фрактальной организацией // Труды 2-го Международного форума (7-й Международной конференции молодых ученых и студентов) «Актуальные проблемы современной науки». – Самара, 2006. Ч. 1-3.

Афонин Анатолий Андреевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге;

E-mail: nikitina.vm@gmail.com

347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44

Тел.: 8(8634) 37-16-06

Afonin Anatoliy ANdreevich

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”

E-mail: nikitina.vm@gmail.com

44, Nekrasovsky, GSP-17a, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634) 37-16-06