

E-mail: [suchinov@gmail.com](mailto:suchinov@gmail.com)

44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634)37-16-06

**Gadelshin Valeriy Kameljanovich**

E-mail: [suchinov@gmail.com](mailto:suchinov@gmail.com)

**Lubomishenko Denis Sergeevich**

E-mail: [suchinov@gmail.com](mailto:suchinov@gmail.com)

УДК 519.8:533

**Б. В. Сидоренко**

### **MRT LATTICE BOLTZMANN МЕТОД В МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ**

*В данной работе рассматриваются MRT Lattice Boltzmann модели в вычислительной гидродинамике. С их помощью проводятся численные эксперименты для реальных водоемов. При численном моделировании была задействована D3Q19 модель, которая была модифицирована для некубических сеток, то есть с преобладанием какого-то шага по пространству. MRT модели показали высокую скорость вычислений и хорошую устойчивость к входным параметрам.*

*Решеточное уравнение Больцмана; Решеточный метод Больцмана; одиночная релаксационная модель; многовременная релаксационная модель; Граничные условия отскока.*

**B.V. Sidorenko**

### **MRT LATTICE BOLTZMANN METHOD IN FLUID DYNAMICS FOR SHALLOW WATER BASINS**

*In the work MRT Lattice Boltzmann model in CFD are considered. With their help numerical experiments for real basins are made. At numerical modeling used D3Q19 model which has been modified for not cubic grids, that is with prevalence of one of step in space. MRT models have shown: high speed of calculations and stability against entrance parameters.*

*LBE; LBM; LB-BGK; Lattice Boltzmann; MRT; Bounce Back BC.*

#### **Введение**

Lattice Boltzmann метод (LBM), использующий минимальные дискретные кинетические модели для решения задач в механике жидкости и других областях физики, привлекает большое внимание в последние годы [1–4]. Вместо прямого решения уравнений Навье-Стокса LBM включает в себя решение решеточного уравнения Больцмана (LBE), которое описывает развитие распределения ансамбля частиц на решетке, коллективное поведение которых асимптотически представляет собой динамику течения жидкости. Как показано при решении LBE, в пределе получаются течения жидкости, представляемые слабо сжимаемыми уравнениями Навье-Стокса.

Эффекты столкновения частиц при решении LBE вообще представляют собой релаксационные модели. Одна из наиболее общих – это одновременная релак-

сационная модель (SRT), также называемая БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) модель [8].

Более общая форма уравнения LB, иногда также называемая методом моментов или обобщенным методом LB уравнения (GLBE), основанном на использовании множества времен релаксации (MRT) для представления оператора столкновений. Это актуально улучшенная форма квазилинейной релаксационной версии уравнения LB с матрицей столкновений [6,7,10]. В отличие от SRT-LBE, MRT-LBE имеет дело напрямую с моментами функции распределения, такими как плотность, импульс, вязкие напряжения. Это моментное представление предоставляет естественный и удобный путь для выражения различных релаксационных процессов благодаря столкновениям, которые часто возникают с различными масштабами по времени. Также, матрица столкновений принимает упрощенную форму, как диагональная матрица в этом пространстве моментов. При тщательном выборе и отделении различных временных масштабов, для описания изменения различных гидродинамических или кинетических режимов, устойчивость метода может быть значительно улучшена [9]. Общий вид MRT моделей в двумерном и трехмерном пространствах был представлен Лэлмандом, Луо [9], д'Юмиерсом и др. [12], соответственно. В данной работе рассматривается применение этих методов к моделированию течений в мелководных водоемах, на примере лагуны на юге Франции «Etang de Berre».

### 1. Обобщенное Lattice Boltzmann уравнение (GLBE) с внешними силами

GLBE состоит из эволюционного уравнения для функции распределения ансамбля частиц, то, как они двигаются и сталкиваются на решетке, смотрите [12,13]

$$f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\delta_t, t + \delta_t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t) = -\sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} (f_{\beta} - f_{\beta}^{eq}) + \sum_{\beta} \left( I_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\beta} \right) S_{\beta} \delta_t \quad (1)$$

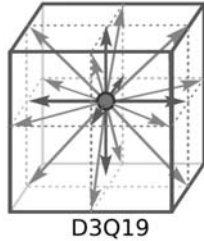
Здесь левая часть уравнения (1) соответствует изменению функции распределения за интервал  $\delta_t$ , так ансамбль частиц перемещается из положения  $\vec{x}$  в его соседнее положение  $\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\delta_t$  со скоростью  $\vec{e}_{\alpha}$  вдоль характерного направления  $\alpha$ . Мы рассматриваем трехмерное 19-и скоростное множество скоростей частиц (D3Q19), показанное на рис.1, имеющее следующий вид:

$$\vec{e}_{\alpha} = \begin{cases} (0,0,0) & \alpha = 0 \\ (\pm c_x, 0, 0), (0, \pm c_y, 0), (0, 0, \pm c_z) & \alpha = 1, \dots, 6 \\ (\pm c_x, \pm c_y, 0), (\pm c_x, 0, \pm c_z), (0, \pm c_y, \pm c_z) & \alpha = 7, \dots, 18 \end{cases} \quad (2)$$

Величины скоростей  $c_x, c_y, c_z$ , компонент скорости частицы  $\vec{e}_{\alpha}$  определяются так  $c_x = \delta_x / \delta_t, c_y = \delta_y / \delta_t$  и  $c_z = \delta_z / \delta_t$ , где  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  – сеточные шаги по пространству, а  $\delta_t$  – шаг по времени.

Первое слагаемое в правой части уравнения (1) представляет собой суммарный эффект столкновения частиц в эволюции функции распределения  $f_{\alpha}$ . GLBE имеет общий вид матрицы столкновений с множеством времен релаксации, которые соответствуют основным физическим параметрам, таким как плотность, импульс и тензор напряжений. Они в свою очередь представляют собой различные кинетические моменты функции распределения.

Второй член в правой части уравнения (1) вносит изменения в развитие функции распределения, обусловленное полями внешних сил  $\vec{F}$ , через источник



D3Q19

Рис. 1. Набор скоростей для обычно используемой трехмерной модели D3Q19

$S_\alpha \cdot I_{\alpha\beta}$  – элементы единичной матрицы.

Источник может быть записан следующим образом [13,11]:

где  $f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u})$  – локальное Максвелловское

$$S_\alpha = \frac{(e_{\alpha j} - u_j) F_j}{\rho c_s^2} f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u}), \quad (3)$$

распределение

$$f_\alpha^{eq,M}(\rho, \vec{u}) = \omega_\alpha \rho \left\{ 1 + \frac{\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^2}{2c_s^4} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2c_s^2} \right\}, \omega_\alpha = \begin{cases} 1/3 & \alpha=0 \\ 1/18 & \alpha=1, \dots, 6 \\ 1/36 & \alpha=7, \dots, 18 \end{cases} \quad (4)$$

и  $c_s = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} / 3$  – скорость звука модели,  $F_i = \{F_x, F_y, F_z\}$  с  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  декартовы компоненты внешней силы.

Локальная макроскопическая плотность и скорость вычисляются следующим образом:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha, \quad (5)$$

$$\vec{j} \equiv \rho \vec{u} = \sum_\alpha f_\alpha \vec{e}_\alpha + \frac{1}{2} \vec{F} \delta_t, \quad (6)$$

а давление  $p$  может быть найдено

$$p = \rho c_s^2. \quad (7)$$

Природа кинетического уравнения (1), и в особенности, матрицы столкновения  $\Lambda_{\alpha\beta}$  станет более наглядна, когда ее определим в терминах множества линейно

независимых моментов  $\hat{\mathbf{f}}$ , вместо функции распределения  $\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{18}]^T$ ,

т.е. через  $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{18}]^T$ , которое получается через матрицу преобразования

$T: \hat{\mathbf{f}} = T\mathbf{f}$ . Элементы матрицы  $T$  даются в работе [12]. Каждый ряд матрицы ортогонален любому другому ряду. Эта матрица такова, что матрица столкновений  $\Lambda$  становится диагональной матрицей  $\hat{\Lambda}$ , после преобразования  $\hat{\Lambda} = T\Lambda T^{-1}$ .

Матрица столкновений в пространстве моментов может быть записана в следующем виде:

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(s_0, s_1, s_2, \dots, s_{18}), \quad (8)$$

где  $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{18}$  – релаксационные временные коэффициенты соответствующих моментов.

Когда есть поле внешних сил  $\mathbf{S} = [S_0, S_1, S_2, \dots, S_{18}]^T$ , необходимо внести соответствующий член в пространство моментов  $\hat{\mathbf{S}}$ , то есть  $\hat{\mathbf{S}} = T\mathbf{S}$ , где  $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{S}_0, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{18}]^T$ .

Свойства переноса текущей жидкости, такие как объемная вязкость и кинематическая вязкость могут быть отнесены к соответствующим временам релаксации посредством анализа Чепмена-Энскога GLBE или анализа устойчивости по Нейману линеаризованной его версии[9] следующим образом:

$$\zeta = \frac{2}{9} \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{2} \right) \delta_i, \quad (9)$$

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_\beta} - \frac{1}{2} \right) \delta_i, \beta = 9, 11, 13, 14, 15. \quad (10)$$

Из уравнения (9)  $s_9 = s_{11} = s_{13} = s_{14} = s_{15}$  сохраняет изотропность тензора напряжений, а  $S_1$  определяет величину объемной вязкости. Свобода выбора релаксационных параметров не имеет гидродинамического значения, но может повысить вычислительную устойчивость при моделировании задач с большими числами Рейнольдса. Основываясь на линейном анализе устойчивости [9], берем следующие значения для других релаксационных параметров [12]:  $s_1 = 1,19$ ,  $s_2 = s_{10} = s_{12} = 1,4$ ,  $s_4 = s_6 = s_8 = 1,2$  и  $s_{16} = s_{17} = 1,98$ . Можно отметить, что все релаксационные параметры имеют следующие границы  $0 < s_\alpha < 2$ . С тех пор, как обобщенное Lattice Boltzmann уравнение (GLBE) использует множество времен релаксации, оно также упоминается как многорелаксационная временная модель LB уравнения (MRT-LBM).

## 2. Вычислительный эксперимент с помощью MRT-LBM для лагуны «Etang de Berre»

В данной работе рассматривается решение гидродинамической задачи, а именно расчет параметров течения водной среды в определенные моменты времени в лагуне «Etang de Berre» с заданными внешними силами, начальными и граничными условиями. Таким образом, в трехмерной области определения задачи  $G = \{(x, y, z) : H(x, y) \leq z \leq 0\}$  – мелководном водоеме «Etang de Berre» (см. рис.2,3), требуется найти компоненты скорости течения  $u = u(x, y, z, t)$ ,  $v = v(x, y, z, t)$ ,  $w = w(x, y, z, t)$ , давления водной среды  $P = P(x, y, z, t)$ , где  $H = H(x, y)$  известная функция рельефа дна. Внешними силами в данной модели являются: сила ветра и сила Кориолиса, вычисляемые по формулам (12) и (16).

В начальный момент времени внутри области  $G$  жидкость покоится, что соответствует для функции распределения  $f_a = \omega_a \rho$ . Изменение уровня свободной поверхности в модели не учитывается, считается, что она всегда горизонтальна. Граничные условия на свободной поверхности для скоростей определяем таким образом:

$$w_s = 0, \quad v \frac{\partial u}{\partial z} = F_{sx}(x, y, t), \quad v \frac{\partial v}{\partial z} = F_{sy}(x, y, t), \quad (11)$$

где  $F_{sx}, F_{sy}$  – компоненты силы трения ветра о морскую поверхность

$$\mathbf{F}_s = F_{sx} \mathbf{i} + F_{sy} \mathbf{j} = \theta \rho_a |\mathbf{w}| \mathbf{w}, \quad (12)$$

где  $\theta = 1,3 \cdot 10^{-3}$  – коэффициент трения о морскую поверхность,  $\rho_a = 1,25 \cdot 10^{-3}$  (г / см<sup>3</sup>) – плотность атмосферы,  $\mathbf{w}$  – скорость ветра (закон Ван-Дорна). Этим условиям для скорости (11) соответствует граничное условие для функции распределения частиц:

$$f_a(x, y, 0, t) = f_a(x, y, -\delta_z, t) + \delta_z \omega_\alpha \rho \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}_s)}{vc_s^2}. \tag{13}$$



Рис. 2. Снимок «Etang de Berre»



Рис. 3. Область решения задачи с г.у.

На дне при  $z = H(x, y)$  и на твердых частях границы для скорости применяются условия прилипания  $u = v = w = 0$ , которым соответствует граничное условие отскока (Bounce-Back BC) для функции распределения:

$$f_{\bar{\alpha}} = f_\alpha. \tag{14}$$

На жидких частях границ и в источниках (в устьях рек)  $\vec{u} = const$  задаются известные потоки жидкости. Для данного типа граничных условий для компонент скорости на границе, часто используют ВВ BC [4,5] для частичной функции распределения  $f_\alpha$ , которые во входном (выходном) отверстии имеют вид (см. рис. 4):

$$f_{\bar{\alpha}} = f_\alpha + 2\omega_\alpha \rho \frac{(\mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2}, \tag{15}$$

где  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$  обозначают направления друг напротив друга:  $\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$ .

На рис.4. обозначены окрестности характерных граничных условий:

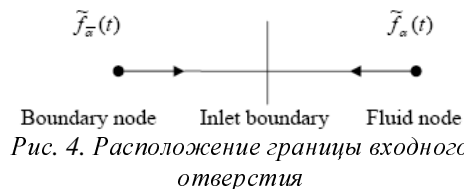


Рис. 4. Расположение границы входного отверстия

**1-2)**  $\vec{u}_n = \vec{u}(z)$ ,  $(|\vec{u}_n| \approx 1 \text{ m/s})$  – в общем случае функция от  $z$  (направление скорости может еще зависеть от того, прилив или отлив в данный период времени для 1)

**5-8)**  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – нормаль к боковой стенке «Etang de Berre».

На движущуюся морскую среду все время действует сила Кориолиса, вычисляемая следующим образом:

$$\vec{F}_{cor} = 2\rho[\vec{\Omega} \times \vec{u}], \quad (16)$$

где  $\vec{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения земли.

Численные результаты моделирования представлены на рисунках 5 и 6, для следующего набора параметров: размерность сетки 94x89x40, пространственные шаги сетки  $\delta_x = \delta_y = 200$  (м),  $\delta_z = 0,25$  (м),  $Re = 1000$ , скорости ветра  $W_x = 2$  (м/с),  $W_y = -5$  (м/с).

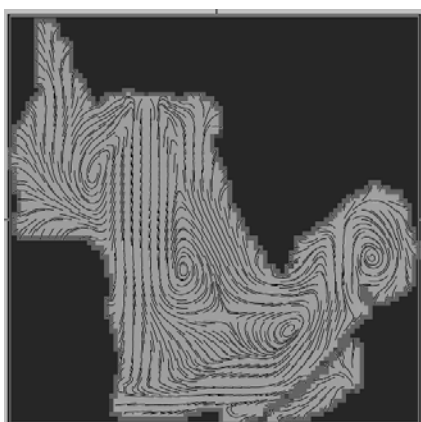


Рис. 5. Линии тока после примерно 10 часов на глубине около 0,5 метра

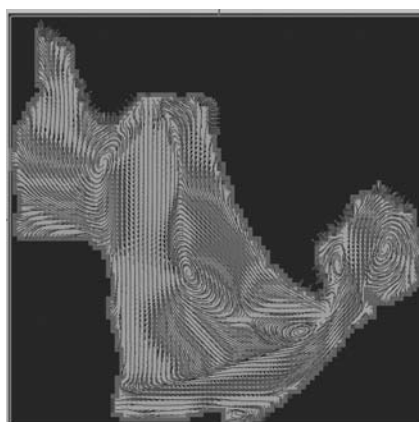


Рис. 6. Линии тока после примерно 10 часов на глубине около 2 метров

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. S. Chen and G. Doolen, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 8, 2527 (1998).
2. S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond* (Clarendon Press, Oxford, 2001).
3. S. Succi, I. Karlin, and H. Chen, *Rev. Mod. Phys.* 74, 1203 (2002).
4. D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, and W. Shyy, *Prog. Aero. Sci.* 39, 329 (2003).
5. G. McNamara and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* 61, 2332 (1988).
6. F. Higuera and J. Jimenez, *Europhys. Lett.* 9, 663 (1989).
7. F. Higuera, S. Succi, and R. Benzi, *Europhys. Lett.* 9, 345 (1989).
8. P. Bhatnagar, E. Gross, and M. Krook, *Phys. Rev.* 94, 511 (1954).
9. P. Lallemand and L.-S. Luo, *Phys. Rev. E* 61, 6546 (2000).
10. R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola, *Phys. Rept.* 222, 145 (1992).
11. P. Resibois and M. D. Leener, *Classical Kinetic Theory of Fluids* (John Wiley and Sons, New York, 1977).
12. D. d'Humieres, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 360, 437 (2002).
13. K. N. Premnath and J. Abraham, *J. Comput. Phys.* 224, 539 (2007).

**Сидоренко Борис Владимирович**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге

E-mail: [sidorenkobv@mail.ru](mailto:sidorenkobv@mail.ru)

347928, Россия, Таганрог, ГСП 17А, пер. Некрасовский, 44

Тел.: 8(8634) 37-16-06

**Sidorenko Boris Vladimirovich**

Taganrog Institute of Technology - Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"

E-mail: [sidorenkobv@mail.ru](mailto:sidorenkobv@mail.ru)

44, Nekrasovsky, GSP-17a, Taganrog, 347928, Russia, Ph.: +7(8634) 37-16-06

УДК 551.594

**А. А. Редин, А. Г. Клово, Г. В. Куповых**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ  
СТРУКТУРЫ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ В УСЛОВИЯХ  
АЭРОЗОЛЬНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ**

*В работе построена модель нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля.*

*Получены распределения электрических характеристик в приземном слое атмосферы в зависимости от интенсивности турбулентного перемешивания и концентраций аэрозольных частиц.*

*Приземный слой; аэрозоль; аэроионы; турбулентное перемешивание; электродный эффект; электрическое поле; ток; проводимость.*

**A.A. Redin, A.G. Klovo, G.V. Kupoviych**

**THE MATHEMATICAL MODELLING OF ELECTRODYNAMIC STRUCTURE  
OF THE ATMOSPHERE SURFACE LAYER IN AEROSOL POLLUTION  
CONDITIONS**

*The model of non-stationary horizontally similar surface layer with single-charged aerosol influence is developed.*

*The distributions of electrical characteristics in the atmosphere surface layer in dependence of turbulence mixing and aerosol particles concentration are received.*

*Surface layer; aerosol; aero-ion; turbulent mixing; electrode effect; electric field; current; conductivity.*

Для нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля система уравнений, описывающих его электрическое состояние в приближении турбулентного электродного эффекта, имеет вид [1]: