

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. – М.: Геос. 2001. – 272 с.

Проценко Елена Анатольевна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: vvpost@rambler.ru

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606

Кафедра высшей математики; старший преподаватель.

Protsenko Elena Anatolievna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: vvpost@rambler.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606

The Department of Higher Mathematics; senior teacher.

УДК 518.5.001.57

А.Е. Чистяков

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ В АЗОВСКОМ МОРЕ С УЧЕТОМ ТРАНСПОРТА СОЛЕЙ И ТЕПЛА

Работа посвящена разработке математической модели для расчета полей скоростей применительно к Азовскому морю. В ходе выполнения работы построена математическая модель для расчета полей скоростей применительно к мелководным водоемам. Данная модель учитывает такие физические параметры как: сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, переменная плотность жидкости, ветровые течения и трение о дно.

Гидродинамика; транспорт солей и тепла; переменная плотность жидкости.

A.E. Chistyakov

THREE-DIMENSIONAL MODEL OF MOVING OF AQUATIC ENVIRONMENT CONSIDERING TRANSPORT OF SALT AND HEAT IN AZOV SEA

This work is dedicated to building of mathematical model of computation of field of velocities with reference to Azov Sea. Mathematical model of computation of field of velocities with reference to shallow water basins was built in this work. This model takes into consideration physical properties: Coriolis force, turbulent exchange, complex geometry of seabed and coast-line, evaporation, river flows, variable liquid density, wind currents and friction on seabed.

Hydrodynamics; transport of salt and heat; variable liquid density.

Экологическая система Таганрогского залива и Азовского моря в целом является уникальной. Наш залив – один из наиболее рыбопродуктивных естественных водоемов, что объясняется благоприятными природно-климатическими условиями, малосоленостью, обилием корма.

С другой стороны, из внутреннего наше Азовское море превратилось в оживленный международный морской перекресток. Море, в особенности залив, начинает подвергаться «новым» видам антропогенного воздействия, обусловленным строительством портов, прокладкой судоходных каналов, интенсификацией судоходства и так далее. В то же время, осуществленные без предварительного математического моделирования проекты прокладки каналов могут привести в дальнейшем к интенсивному заносу и заиливанию и, как следствие, к большим материальным затратам на поддержание каналов в «штатном» режиме. Также в результате непродуманного сооружения и углубления каналов в море могут образоваться застойные зоны. Весьма высока вероятность занесения новых, враждебных по отношению к азовским, видов средиземноморской флоры и фауны. Все это может привести к последствиям, сопоставимым с теми, что связаны со строительством Волго-Донского канала. Сказанное выше и обуславливает актуальность анализа и прогноза развития экологической системы Таганрогского залива и Азовского моря.

Экологическая система моря представляет собой сложную многопараметрическую систему, процессы, протекающие в ней, являются пространственно-трехмерными и нестационарными и имеют существенно нелинейный характер. Поэтому, даже относительно простые натурные эксперименты по анализу морской экосистемы являются чрезвычайно трудоемкими и дорогостоящими. В качестве примера следует назвать проведенный в относительно благополучные для финансирования научных исследований 80-е годы эксперимент «Онега-89» на Северо-Западе России. В этом опыте в течение месяца были задействованы три научно-исследовательских судна, летающая самолет-лаборатория, а также искусственный спутник Земли, а результаты позволили лишь на короткое время предсказать развитие системы Онежского озера. Не преуменьшая роли натурных экспериментов, следует все же отметить, что наиболее оптимальным в смысле затрат и достоверности полученных результатов представляется подход, основанный на сочетании относительно дешевых и простых натурных экспериментов и математического моделирования исследуемых процессов. В еще большей мере сказанное становится справедливым в отношении прогнозирования экосистемы моря. В этом случае математическое моделирование является, по сути дела, единственным надежным средством получения результатов. Правильность такого подхода к прогнозу развития водных экосистем была осознана научным сообществом достаточно давно. Однако только в конце семидесятых годов были созданы реальные предпосылки внедрения методологии математического моделирования в экологии.

Возможное практическое применение математических моделей связано не только с экологическими проблемами. Имея на руках эту модель, можно заблаговременно предсказывать различные природные катаклизмы, связанные с подъемом воды в Таганрогском заливе и затоплением прибрежных районов. На основе математических моделей можно, используя точные данные о ветре, стоке Дона и располагая геоинформационной системой Таганрога, предсказать, какие конкретные строения и когда будут затоплены в случае ураганного ветра. Однако не надо думать, что для этого достаточно иметь только модель и компьютер «под рукой». Компьютерные программы должны быть увязаны с геоинформационной базой данных прибрежных районов, нужна точная и оперативная информация о метеословиях в воздушной среде. Другое направление работы связано с построением трехмерных моделей, более точно описывающих поведение экосистем, когда нужно моделировать не только движение воды, но и гидрохимические и биологические процессы.

Запишем исходную систему уравнений:

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (v u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности в случае переменной плотности запишется следующим образом:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (1–4), где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости, P – гидродинамическое давление, ρ – плотность, Ω – угловая скорость вращения земли, θ – угол между вектором угловой скорости и вертикалью, μ, ν – горизонтальная и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена, задана при следующих граничных условиях:

- ◆ на входе (устье рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш):

$$u(x, y, z, t) = u(t), \quad v(x, y, z, t) = v(t), \quad p'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

- ◆ боковая граница (берег и дно Азовского моря):

$$\begin{aligned} \rho_v \mu (u')_n(x, y, z, t) &= -\tau_x(t), & \rho_v \mu (v')_n(x, y, z, t) &= -\tau_y(t), \\ V_n(x, y, z, t) &= 0, & p'_n(x, y, z, t) &= 0, \end{aligned}$$

- ◆ верхняя граница (поверхность Азовского моря):

$$\begin{aligned} \rho \mu (u')_n(x, y, z, t) &= -\tau_x(t), & \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) &= -\tau_y(t), \\ w(x, y, t) &= -\omega - \frac{p'_t}{\rho g}, & p'_n(x, y, t) &= 0, \end{aligned}$$

- ◆ на выходе (выход в Черное море):

$$p'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

где ω – интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна), ρ_v – плотность взвеси.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности:

$$\tau_x = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_x |\vec{w}|, \quad \tau_y = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_y |\vec{w}|,$$

где \vec{W} – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы,

$$C_p(|\vec{w}|) = \begin{cases} 0.0088, & |\vec{w}| < 6,6 \text{ м/с} \\ 0.0026, & |\vec{w}| \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases} \text{ – безразмерный коэффициент.}$$

Составляющие тангенциального напряжения для дна, с учетом введенных обозначений, могут быть записаны следующим образом:

$$\tau_x = \rho C_p(|\vec{V}|)u|\vec{V}|, \quad \tau_y = \rho C_p(|\vec{V}|)v|\vec{V}|.$$

Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой параллелепипед. Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку

$$w_h = \left\{ x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; i = \overline{1..N_x}, j = \overline{1..N_y}, k = \overline{1..N_z}; \right. \\ \left. N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z \right\},$$

где i, j, k – индексы по направлениям x, y, z ,

h_x, h_y, h_z – шаги по пространственным направлениям,

N_x, N_y, N_z – количество узлов по координатным направлениям,

l_x, l_y, l_z – пространственные размеры области.

Для уравнений (1–3) аппроксимируем первое слагаемое:

$$\frac{\bar{u} - u}{\tau} + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (v u'_z)'_z + \\ + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (5)$$

$$\frac{\bar{v} - v}{\tau} + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\bar{w} - w}{\tau} + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + \\ + 2\Omega u \cos \theta + g. \quad (7)$$

Распишем систему уравнений (5-7), согласно методу поправки к давлению, по физическим процессам. Для этого первое слагаемое каждого уравнения преобразуем следующим образом:

$$\frac{\bar{u} - \tilde{u} + \tilde{u} - u}{\tau} + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (v u'_z)'_z + \\ + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (8)$$

$$\frac{\bar{v} - \tilde{v} + \tilde{v} - v}{\tau} + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - \\ - 2\Omega u \sin \theta, \quad (9)$$

$$\frac{\bar{w} - \tilde{w} + \tilde{w} - w}{\tau} + u w'_x + v w'_y + w w'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g. \quad (10)$$

Разобьем каждое уравнение системы (8-10) на две части следующим образом:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u \tilde{u}'_x + v \tilde{u}'_y + w \tilde{u}'_z = (\mu \tilde{u}'_x)'_x + (\mu \tilde{u}'_y)'_y + (v \tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta). \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u \tilde{v}'_x + v \tilde{v}'_y + w \tilde{v}'_z = (\mu \tilde{v}'_x)'_x + (\mu \tilde{v}'_y)'_y + (v \tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u \tilde{w}'_x + v \tilde{w}'_y + w \tilde{w}'_z = (\mu \tilde{w}'_x)'_x + (\mu \tilde{w}'_y)'_y + (v \tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g. \quad (13)$$

$$\frac{\bar{u} - \tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} P'_x, \quad (14)$$

$$\frac{\bar{v} - \tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} P'_y, \quad (15)$$

$$\frac{\bar{w} - \tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} P'_z. \quad (16)$$

Умножим на ρ и продифференцируем уравнения (14), (15), (16) по переменным x, y, z соответственно, после чего получим:

$$\frac{(\rho \bar{u})'_x - (\rho \tilde{u})'_x}{\tau} = -P''_{xx}, \quad (17)$$

$$\frac{(\rho \bar{v})'_y - (\rho \tilde{v})'_y}{\tau} = -P''_{yy}, \quad (18)$$

$$\frac{(\rho \bar{w})'_z - (\rho \tilde{w})'_z}{\tau} = -P''_{zz}. \quad (19)$$

Сложим уравнения (17-19)

$$\frac{(\rho \bar{u})'_x - (\rho \tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\rho \bar{v})'_y - (\rho \tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\rho \bar{w})'_z - (\rho \tilde{w})'_z}{\tau} = -P''_{xx} - P''_{yy} - P''_{zz}. \quad (20)$$

Подставим (4) в (20) в результате чего получим:

$$-\rho'_t - \frac{(\rho \tilde{u})'_x}{\tau} - \frac{(\rho \tilde{v})'_y}{\tau} - \frac{(\rho \tilde{w})'_z}{\tau} = -P''_{xx} - P''_{yy} - P''_{zz}$$

или

$$P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz} = \rho'_t + \frac{(\rho \tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\rho \tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\rho \tilde{w})'_z}{\tau}. \quad (21)$$

Большие значения внешней силы и высокий градиент поля давления влияют на устойчивость модели. Из полного гидродинамического давления можно условно выделить две составляющие: давления столба жидкости и гидродинамическую часть:

$$P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho_0 g z, \quad (22)$$

где ρ_0 – плотность пресной воды при нормальных условиях.

Продифференцируем уравнение (22) по пространственным переменным.

$$P'_x = p'_x, \quad (23)$$

$$P'_y = p'_y, \quad (24)$$

$$P'_z = p'_z + \rho_0 g. \quad (25)$$

Подставим уравнения (23-25) в исходную систему (1-4), получим вариант метода поправки к давлению в случае переменной плотности:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z = (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (v\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v\sin\theta - w\cos\theta). \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z = (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (v\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin\theta, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z = (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (v\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos\theta + \\ + g\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \rho'_t + \frac{(\rho\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\rho\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\rho\tilde{w})'_z}{\tau}, \quad (29)$$

$$\frac{\bar{u} - \tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_x, \quad (30)$$

$$\frac{\bar{v} - \tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_y, \quad (31)$$

$$\frac{\bar{w} - \tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} p'_z. \quad (32)$$

Таким образом, в правой части уравнения (28) появляется сила Архимеда.

Задача моделирования распространения солей и тепла связана с решением уравнения диффузии конвекции:

$$T'_t + uT'_x + vT'_y + wT'_z = (\mu T'_x)'_x + (\mu T'_y)'_y + (v T'_z)'_z + f_T, \quad (33)$$

$$S'_t + uS'_x + vS'_y + wS'_z = (\mu S'_x)'_x + (\mu S'_y)'_y + (v S'_z)'_z + f_S, \quad (34)$$

где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости; μ, v – горизонтальная и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена; f_T, f_S – источники тепла и соли (находится на границе области).

Уравнения (33–34), заданы при следующих граничных условиях:

◆ на входе (устье рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш) и на выходе (выход в Черное море) –

если $V_n > 0$:

$$T(x, y, z, t) = T(t) \quad S(x, y, z, t) = S(t), \quad (35)$$

если $V_n \leq 0$:

$$T'_n(x, y, z, t) = 0 \quad S'_n(x, y, z, t) = 0 \quad f_T = 0 \quad f_S = 0, \quad (36)$$

◆ боковая граница (берега и дно Азовского моря)

$$T'_n(x, y, z, t) = 0 \quad S'_n(x, y, z, t) = 0 \quad f_T = 0 \quad f_S = 0, \quad (37)$$

◆ верхняя граница (поверхность Азовского моря)

$$T'_n(x, y, z, t) = 0 \quad S'_n(x, y, z, t) = 0 \quad f_T = k(T_a - T) \quad f_S = \frac{\omega}{h_z - \omega} S, \quad (38)$$

где ω – интенсивность испарения жидкости, T_a – температура атмосферы, k – коэффициент передачи тепла между атмосферой и водной средой.

Уравнения (33) и (34) отличаются от уравнения (2.11) лишь правой частью и аппроксимация частных производных конечными разностями происходит аналогичным образом.

Уравнение состояния (UNESCO) –

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & 800,969062 \cdot 10^{-4} + 588,194023 \cdot 10^{-4} T + 797,018644 \cdot 10^{-3} S - 811,465413 \cdot 10^{-5} T^2 - \\ & - 325,310441 \cdot 10^{-5} TS + 131,710842 \cdot 10^{-6} S^2 + 476,600414 \cdot 10^{-7} T^3 + \\ & + 389,187483 \cdot 10^{-7} T^2 S + 287,971530 \cdot 10^{-8} TS^2 - 611,831499 \cdot 10^{-10} S^3, \end{aligned} \quad (39)$$

где температура задана в градусах Цельсия, а соленость – в промилях. Плотность водной среды считается по формуле

$$\rho = \tilde{\rho} + \rho_0. \quad (40)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. – М.: Наука. 1988. – 733 с.
2. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутреннее течения газовых смесей. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
3. Роч П. Вычислительная гидродинамика.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
5. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода <http://www-sbras.nsc.ru/EMIS/journals/SMZ/2002/03/552.pdf>.

Чистяков Александр Евгеньевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Chistyakov Alexander Evgenievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

УДК 519.4

Д.В. Лапин, А.А. Черчаго, А.Е. Чистяков

**СОВМЕСТНЫЕ ЭКСПЕДИЦИОННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АЗОВСКОГО МОРЯ НА
МНОГОЦЕЛЕВОЙ ЯХТЕ «БУРЕВЕСТНИК» И НИС Т/Х «ПЛАТОВ»**

В данной статье представлены результаты совместных экспедиционных исследований в Таганрогском заливе и восточной части Азовского моря, проведенных в августе 2009 года на многоцелевой яхте «Буревестник» и НИС т/х «Платов»

ADCP; Акустический Доплеровский профилограф; SBE 19 Plus; исследования, гидрофизика моря.

D.V. Lapin, A.A. Cherchago, A.E. Chistyakov

**JOINED RESEARCH RESULTS OF THE AZOV SEA HYDROPHYSIC
PARAMETRES TAKEN BY THE MULTIPURPOSE YACHT "PETREL"
AND THE RESEARCH SHIP "PLATOV"**

This article presents joined research results fulfilled in the August, 2009. The field of research is the Taganrog Bay and the eastern part of the Azov sea. The research was conjointly taken by the multipurpose yacht "Burevestnik" and the research ship "Platov"

ADCP; Acoustic Doppler current profiler; SBE 19 Plus; researches; sea hydrophysics.

НОЦ КИММ (НОЦ ММЭС) начиная с 2000 года ежегодно занимается мониторингом экологической обстановки в акватории Азовского моря. К настоящему времени предпринято уже более 23 экспедиционных работ с общей протяженностью маршрутов более 5 500 километров.

Целью экспедиции проведенной в августе 2009 года в Таганрогском заливе и Восточной части Азовского моря являлась изучение экологического состояния акватории. Изучение тонкой структуры течений, гидрофизических и гидрохимических параметров водной среды дает нам комплексное представление об экологическом состоянии объекта исследований.