

то с точностью до величин порядка $k\Delta\theta$ можно считать, что основным механизмом воздействия низкочастотной волны на высокочастотную является локальное изменение скорости смещения волновых профилей $V_1(z, r, \theta)$ на величину V_2 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тагунов Е.Я. Исследование нелинейных взаимодействий слабых ультразвуковых сигналов с мощными низкочастотными акустическими возмущениями. – М.: Изд-во МГУ. 1981. – 14 с.
2. Moffett M. et. al. Experimental demonstration of the absorption of sound by sound in water. // J. Acoust. Soc. Amer. - 1978. - Vol. 63. – P. 1048-1051.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн – М.: Наука, 1990. – 432 с.

Савицкий Олег Анатольевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: osav66@mail.ru.

347932 г. Таганрог, ул. Ломоносова 57/1, кв. 57.

Тел.: 8(8634)315-638; 8-903-435-40-49.

Кафедра высшей математики; доцент; зам. директора НОЦ Комплексных исследований и математического моделирования сложных природных и техногенных систем, с.н.с. ОКБ «Ритм» ЮФУ.

Savitsky Oleg Anatoljevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: osav66@mail.ru.

57/1 Lomonosov street, sq. 57, 347932. Taganrog, Russia.

Phone: 8(8634)315-638; 8-903-435-40-49.

The Department of Higher Mathematics; associate professor; the deputy director REC «Complex research and mathematical modeling of the complex natural and anthropogenic systems», senior staff scientist of the Design Office "RITM".

УДК 551.594

А.А. Редин, А.Г. Клово, Г.В. Куповых, В.Н. Морозов

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРНОГО ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ

В работе построена модель нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля.

Получены распределения электрических характеристик в приземном слое атмосферы в зависимости от интенсивности турбулентного перемешивания и концентраций аэрозольных частиц.

Приземный слой; аэрозоль; ионы; турбулентное перемешивание; электродный эффект; электрическое поле.

A.A. Redin, A.G. Klovo, G.V. Kupovykh, V.N. Morozov

ELECTRODYNAMIC MODEL OF THE ATMOSPHERIC SURFACE LAYER

The model of non-stationary horizontally similar surface layer with single-charged aerosol influence is developed.

The distributions of electrical characteristics in the atmosphere surface layer in dependence of turbulence mixing and aerosol particles concentration are received.

Surface layer; aerosol; ions; turbulent mixing; electrode effect; electric field.

Введение

Электродинамическая структура атмосферного приземного слоя определяется, так называемым «электродным эффектом» [1]. Теоретически проблема электродного эффекта формулируется в виде стационарной задачи о нахождении распределения концентрации положительных и отрицательных легких ионов (аэроионов), напряженности электрического поля и плотности электрического тока вблизи поверхности земли. В зависимости от метеорологического режима атмосферы рассматриваются два крайних случая: классический (нетурбулентный) электродный эффект и турбулентный электродный эффект [1]. Присутствие аэрозольных частиц в атмосфере, являющихся стоком для легких ионов, оказывает влияние на электродный эффект, и при достаточно больших концентрациях электрическое состояние приземного слоя может определяться только тяжелыми ионами, образовавшимися за счет взаимодействия аэрозоля с аэроионами [1].

Электродинамические процессы, протекающие в атмосферном приземном слое, являются нестационарными. Впервые модель нестационарного электродного эффекта, исходными уравнениями которой являлись уравнения баланса для концентрации легких ионов и уравнение Пуассона с учетом турбулентного перемешивания в атмосфере и наличия аэрозольных частиц, рассмотрена в работе [2]. При этом модель сильно упрощена: коэффициент турбулентной диффузии и профиль интенсивности ионообразования задавались постоянными. В качестве граничных условий использовались стационарные условия: аналогичные классическому электродному эффекту [1]. Одновременно предполагалось постоянство плотности полного тока. В качестве начальных условий нестационарной задачи использовались стационарные профили. В результате численного моделирования получено, что время релаксации электродного эффекта составляет приблизительно 15 мин, при увеличении значения коэффициента турбулентности оно возрастает. Присутствие аэрозольных частиц приводит к разделению заряда в атмосфере. В работе [3] проведен анализ нестационарного электродного эффекта при условии постоянного электрического поля, не меняющегося с высотой. Реально это условие не выполняется при наличии электродного эффекта. Время релаксации электродного эффекта уменьшается с увеличением турбулентной диффузии, что противоречит результатам работы [2].

В работах [4,5] построены и численно реализованы нестационарные модели электродинамического состояния приземного слоя в приближениях классического и турбулентного электродного эффекта без учета аэрозольных частиц в атмосфере. Время установления стационарного режима составило 5-7 мин. в первом случае и 10-15 мин во втором и не зависело от степени турбулентного перемешивания.

Общая постановка задачи моделирования электродинамического состояния атмосферного приземного слоя

Предполагая, что электрическое поле является потенциальным, общая система уравнений для моделирования электродинамических процессов в атмосферном приземном слое имеет вид [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_{1,2}^i}{\partial t} + \operatorname{div} \left(n_{1,2}^i \vec{v} \right) + \operatorname{div} \left(n_{1,2}^i b_{1,2}^i \vec{E} \right) - \operatorname{div} D_{1,2}^i \operatorname{grad} n_{1,2}^i = q_{1,2}^i \left(\vec{r} \right) - \alpha_{1,2}^i n_1^i n_2^i - k_{1,2}^i, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \\ \vec{E} = -\nabla \varphi, \end{array} \right. \quad (1)$$

где φ – электрический потенциал, \vec{V} – скорость гидродинамических течений, ρ – объемная плотность электрического заряда.

С соответствующими начальными и граничными условиями (1) образует полную систему уравнений для нахождения распределений \vec{E} , ρ , φ в приземном слое атмосферы и является исходной для моделирования электродинамических процессов в атмосферном приземном слое [1].

Для нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля система уравнений, описывающих его электрическое состояние в приближении турбулентного электродного эффекта, приобретает вид [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_2 + N_0 = N = \text{const}, \quad (a) \\ \frac{\partial N_{1,2}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi(z) \cdot \frac{\partial N_{1,2}}{\partial z} \right) = \eta_2 \cdot N_0 \cdot n_{1,2} - \eta_1 \cdot N_{1,2} \cdot n_{2,1}, \quad (b) \\ \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} (b_{1,2} \cdot E \cdot n_{1,2}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z) \cdot \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z} \right) = \\ = q - \alpha \cdot n_1 \cdot n_2 - \eta_1 \cdot n_{1,2} \cdot N_{2,1} - \eta_2 \cdot n_{1,2} \cdot N_0, \\ \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\epsilon_0} \cdot (n_1 - n_2 + N_1 - N_2), \quad (d) \end{array} \right. \quad (2)$$

Как видно из системы (2), при наличии аэрозольных частиц в атмосфере, в правой части ионизационно-рекомбинационных уравнений (с) и уравнении Пуассона (d) появляются члены, описывающие их взаимодействие с легкими ионами. Кроме того, добавляются уравнения (a) и (b), описывающие турбулентный перенос, образовавшихся тяжелых ионов.

Для коэффициентов турбулентной диффузии используются стационарные представления для легких $D_T(z) = D_1 \cdot z$ и для тяжелых $\chi(z) = D_2 \cdot z$ ионов.

Характерные значения основных параметров системы (2) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Название	Значение
E	Напряженность электрического поля	$\sim 10^2 \text{ В м}^{-1}$
b_1	Подвижность положительных легких ионов	$1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$
b_2	Подвижность отрицательных легких ионов	$1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$
η_1	Коэффициент взаимодействия легких ионов с заряженными ядрами	$1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$
η_2	Коэффициент взаимодействия легких ионов с нейтральными тяжелыми ядрами	$4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$
α	Коэффициент рекомбинации легких ионов	$1,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$
z_0	Параметр шероховатости земной поверхности	$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
e	Элементарный заряд	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
ϵ_0	Электрическая постоянная	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
z_0	Параметр шероховатости земной поверхности	$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
$n_{1,2}$	Объемная концентрация положительных и отрицательных легких ионов	$\sim (10^8 - 10^9) \text{ м}^{-3}$
$N_{0,1,2}$	Объемная концентрация нейтральных, положительных и отрицательных тяжелых ионов, соответственно	$\sim (10^8 - 10^{10}) \text{ м}^{-3}$
D_1	Множитель в коэффициенте турбулентной диффузии легких ионов	$(0,01 - 0,1) \text{ м с}^{-1}$
q	Интенсивность ионообразования	$\sim (10^6 - 10^7) \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$
D_2	Множитель в коэффициенте турбулентной диффузии для тяжелых ионов	$(0,01 - 0,1) \text{ м с}^{-1}$

Начальные и граничные условия формулируются следующим образом.

Для легких ионов:

$$\begin{cases} n_{1,2}|_{t=0} = \frac{-BN + ((BN)^2 + 4\alpha q)^{1/2}}{2\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\frac{(z-z_0)}{l}}\right), \\ n_{1,2}|_{z=z_0} = 0, \\ n_{1,2}|_{z=\infty} = \frac{-BN + ((BN)^2 + 4\alpha q)^{1/2}}{2\alpha}, \end{cases} \quad (3)$$

Для тяжелых ионов и электрического поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{1,2}|_{t=0} = \frac{\eta_2 N}{2\eta_2 + \eta_1}, \\ \left(\frac{\partial N_{1,2}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \\ N_{1,2}|_{z=\infty} = \frac{\eta_2 N}{2\eta_2 + \eta_1}, \\ E|_{t=0} = E_0, \\ E|_{z=z_0} = E_0, \end{array} \right. \quad (4)$$

где $B = \frac{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{2 \cdot \eta_2 + \eta_1}$.

Для функции интенсивности ионообразования q использовалось представление [1]:

$$q(z) = \left(7 + 4,8e^{-z/0,423} \right) \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (5)$$

Оценки для толщины электродного слоя при $D_1 = 0,1 \text{ мс}^{-1}$ соответственно равны $l_1 = 15 - 6,5 \text{ м}$ при $N = 10^8 - 10^{10} \text{ м}^{-3}$.

Входными параметрами модели являются заданные начальные профили концентраций положительных (N_1) и отрицательных (N_2) тяжелых ионов, начальные профили концентраций положительных (n_1) и отрицательных (n_2) легких ионов, профиль напряженности электрического поля (E), которые заданы в соответствии с уравнениями системы (2) и удовлетворяют уравнению Пуассона.

Результатом численного моделирования являются профили концентраций положительных и отрицательных тяжелых ионов, концентраций положительных и отрицательных легких ионов и напряженности электрического поля в различные моменты времени, а также профили плотности тока проводимости и плотности объемного заряда для легких и тяжелых ионов, рассчитываемые по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} j(t) = e(b_1 n_1(t) + b_2 n_2(t)) E_\infty, \\ \rho_1(z, t) = e(n_1(z, t) - n_2(z, t)), \\ \rho_2(z, t) = e(N_1(z, t) - N_2(z, t)). \end{array} \right. \quad (6)$$

Таким образом, представленная модель позволяет исследовать пространственно-временные закономерности электрических параметров атмосферного приземного слоя в зависимости от электрического поля, степени турбулентного перемешивания и ионизации воздуха, а также концентрации аэрозольных частиц в атмосферном приземном слое.

Анализ уравнений электродинамической модели применительно к атмосфере

Полагая $D_1 = D_2$, перейдем к безразмерной форме записи уравнений системы (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_0}{N_\infty} = \frac{N}{N_\infty} - (N'_1 + N'_2), \\ \frac{\tau}{T} \frac{\partial N'_{1,2}}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial z'} (z' \cdot \frac{\partial N'_{1,2}}{\partial z'}) = \tau \cdot n_\infty \cdot \left(\frac{\eta_2 N_0}{N_\infty} - \eta_1 n'_{2,1} N'_{1,2} \right), \\ \frac{\tau}{T} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t'} \pm \xi_{1,2} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} \cdot E') - \frac{\partial}{\partial z'} (z' \cdot \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'}) = \\ = \frac{\tau}{n_\infty} (q - \alpha n_\infty^2 n'_1 n'_2 - \eta_1 n_\infty N_\infty n'_{1,2} N'_{2,1} - \eta_2 n_\infty N_0 n'_{1,2}), \\ \frac{\partial E'}{\partial z'} = \gamma_1 (n'_1 - n'_2) + \gamma_2 (N'_1 - N'_2), \end{array} \right. \quad (7)$$

где $t' = t/T$, $z' = z/l_1$, $n'_{1,2} = n_{1,2}/n_\infty$, $E' = E/E_\infty$, $N'_{1,2} = N_{1,2}/N_\infty$,

$$n_{1,2} \Big|_{z \rightarrow \infty} = n_\infty = \sqrt{\frac{q_1}{\alpha}}, \quad E \Big|_{z \rightarrow \infty} = E_\infty, \quad l_1 = D_1 \cdot \tau, \quad n'_{1,2} = n_{1,2}/n_\infty,$$

$$n_\infty = \frac{-BN + ((BN)^2 + 4\alpha q)^{1/2}}{2\alpha}, \quad B = \frac{2\eta_2 \eta_1}{2\eta_2 + \eta_1},$$

$$N_\infty = \frac{\eta_2 N}{2\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = (4\alpha q_\infty + (\eta N)^2)^{-1/2}.$$

Характерное время протекания гидродинамических процессов (T) составляет несколько часов, тогда как характерное время протекания электрических процессов $\tau \approx 150-60c$ ($q = 7 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$) при $N \sim 10^8 - 10^{10} \text{ м}^{-3}$ соответственно [6].

Система уравнений (8) характеризуется безразмерными параметрами:

$$\xi_{1,2} = \frac{|b_{1,2}| \cdot E_\infty \cdot \tau}{l_1}, \quad \gamma_1 = \frac{en_\infty l_1}{\varepsilon_0 E_\infty}, \quad \gamma_2 = \frac{eN_\infty l_1}{\varepsilon_0 E_\infty}.$$

Когда параметр $\xi_{1,2} \geq 1$, электрическое состояние приземного слоя определяется классическим электродным эффектом [1], а пространственно-временное распределение легких ионов в приземном слое обусловлено только электрическими силами.

Предполагая, что влиянием аэрозольных частиц можно пренебречь (при концентрациях менее 10^9 м^{-3} это вполне правомерно [1]), система уравнений классического электродного эффекта с начальными и граничными условиями имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm b_{1,2} \frac{\partial (E \cdot n_{1,2})}{\partial z} = q(z) - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_1 - n_2). \end{cases} \quad (8)$$

$$n_{1,2}(z)|_{t=0} = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{z}{l_0}} \right), \quad E(z)|_{t=0} = E_0, \quad n_2|_{z=0} = 0,$$

$$E|_{z=0} = E_0, \quad n_1|_{z=l} = n_2|_{z=l} = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}.$$

Здесь $l_0 = b_{1,2} E_\infty \tau$ - характерная толщина классического электродного слоя. Соответствующая оценка дает значение $l_0 \approx 4,2$ м.

На рис. 3 приведены модельные расчеты электрических характеристик атмосферного приземного слоя для случая классического электродного эффекта полученные в [4].

Если $\xi_{1,2} < 1$, имеет место турбулентный электродный эффект [1]. В этом случае предполагается, что перенос легких ионов в атмосфере осуществляется, наряду с электрическими силами турбулентными потоками воздуха. Система уравнений с начальными и граничными условиями для этого случая выглядит следующим образом [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm b_{1,2} \frac{\partial (E \cdot n_{1,2})}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z) \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z} \right) = q(z) - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_1 - n_2). \end{cases} \quad (9)$$

$$n_{1,2}(z)|_{t=0} = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{z-z_0}{l_1}} \right), \quad E(z)|_{t=0} = E_0, \quad n_{1,2}|_{z=z_0} = 0,$$

$$n_{1,2}|_{z=l} = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}, \quad E|_{z=z_0} = E_0,$$

где $l_1 = D_1 \cdot \tau$ - характерная толщина турбулентного электродного слоя, а ее оценка составляет $l_1 \approx 30$ м.

Введение параметра шероховатости z_0 , зависящего от числа Рейнольдса, эквивалентно определению характера динамического взаимодействия турбулентного потока с подстилающей поверхностью (в случае аэродинамически гладкой поверхности параметр $z_0 = 0$).

На рис. 4 приведены модельные расчеты электрических характеристик атмосферного приземного слоя для случая турбулентного электродного эффекта полученные в [5].

При $\xi_{1,2} \ll 1$, имеет место приближение сильного турбулентного перемешивания, т.е. перенос ионов осуществляется только турбулентной диффузией. Система уравнений с начальными и граничными условиями, описывающая электрические процессы в горизонтально однородном нестационарном приземном слое имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z) \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z} \right) &= q - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{\partial E}{\partial t} - D_T(z) \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 4\pi\lambda(z)E &= 4\pi j_0, \\ n_{1,2}(z)|_{t=0} &= \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{z-z_0}{l}} \right), \quad E(z)|_{t=0} = E_0, \quad n_{1,2}|_{z=z_0} = 0, \\ n_{1,2}|_{z=l} &= \sqrt{\frac{q}{\alpha}}, \quad \frac{dE}{dz}|_{z=z_0} = 0, \quad E(z)|_{z=l} = \frac{j_0}{\lambda_\infty}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае $|\gamma_{1,2}| \ll 1$ электрическим полем, создаваемым электрическим объемным зарядом, создаваемым легкими или тяжелыми ионами, соответственно можно пренебречь.

В случае $|\gamma_2| \gg |\gamma_1|$ электрическим полем, создаваемым объемным зарядом, создаваемым легкими ионами вблизи поверхности земли, можно пренебречь. В этом случае предполагается, что электродинамическое состояние приземного слоя определяется только тяжелыми ионами, образовавшимися за счет взаимодействия аэрозоля с легкими ионами.

Численная схема решения и ее устойчивость

Для численного решения системы уравнений (2) с начальными и граничными условиями (3–4) вводилась сетка по переменной z с шагом h : $\Omega_h = \{z_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = l\}$, $\omega_h = \{z_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, hN = l\}$ и по переменной t с шагом τ : $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, K, K\tau = T\}$.

Для записи системы уравнений (2) с начальными и граничными условиями (3–4) в конечно-разностном виде использовалось однопараметрическое семейство схем с весами [7].

Произвольный действительный параметр σ задавался такой, что при $\sigma = 0$ получаем явную схему, при $\sigma = 1$ – чисто неявную схему и при $\sigma = 0,5$ – симметричную схему. При использовании 6 точечного шаблона осуществлялся переход от непрерывной задачи (2) к дискретной, которая в индексной форме выглядит следующим образом:

$$(N_1)_i^{k+1} + (N_2)_i^{k+1} + (N_0)_i^{k+1} = N = \text{const},$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(N_{1,2})_i^{k+1} - (N_{1,2})_i^k}{\tau} + \sigma \left(- \left(\chi_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \left(\frac{(N_{1,2})_{i+1}^{k+1} - (N_{1,2})_i^{k+1}}{h^2} \right) - \chi_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \left(\frac{(N_{1,2})_i^{k+1} - (N_{1,2})_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right) \right) + \eta_1 \cdot (N_{1,2})_i^{k+1} \cdot (n_{2,1})_i^{k+1} \right) + \\
 & + (1-\sigma) \left(- \left(\chi_{i+\frac{1}{2}}^k \left(\frac{(N_{1,2})_{i+1}^k - (N_{1,2})_i^k}{h^2} \right) - \chi_{i-\frac{1}{2}}^k \left(\frac{(N_{1,2})_i^k - (N_{1,2})_{i-1}^k}{h^2} \right) \right) + \eta_1 \cdot (N_{1,2})_i^k \cdot (n_{2,1})_i^k \right) = \eta_2 \cdot (N_0)_i^{k+1} \cdot (n_{1,2})_i^{k+1}, \\
 & \frac{(n_{1,2})_i^{k+1} - (n_{1,2})_i^k}{\tau} + \sigma \left(\pm b_{1,2} \frac{E_{i+1}^{k+1}(n_{1,2})_i^{k+1} - E_{i-1}^{k+1}(n_{1,2})_i^{k+1}}{2h} - \left(D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \left(\frac{(n_{1,2})_{i+1}^{k+1} - (n_{1,2})_i^{k+1}}{h^2} \right) - D_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \left(\frac{(n_{1,2})_i^{k+1} - (n_{1,2})_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right) \right) \right) + \\
 & + \alpha \cdot (n_1)_i^{k+1} \cdot (n_2)_i^{k+1} + \eta_1 \cdot (n_{1,2})_i^{k+1} \cdot (N_{2,1})_i^{k+1} + \eta_2 \cdot (n_{1,2})_i^{k+1} \cdot (N_0)_i^{k+1} + (1-\sigma) \left(b_1 \frac{E_{i+1}^k(n_{1,2})_i^k - E_{i-1}^k(n_{1,2})_i^k}{2h} - \right. \\
 & \left. - \left(D_{i+\frac{1}{2}}^k \left(\frac{(n_{1,2})_{i+1}^k - (n_{1,2})_i^k}{h^2} \right) - D_{i-\frac{1}{2}}^k \left(\frac{(n_{1,2})_i^k - (n_{1,2})_{i-1}^k}{h^2} \right) \right) \right) + \alpha \cdot (n_1)_i^k \cdot (n_2)_i^k + \eta_1 \cdot (n_{1,2})_i^k \cdot (N_{2,1})_i^k + \eta_2 \cdot (n_{1,2})_i^k \cdot (N_0)_i^k = q, \quad (11) \\
 & \frac{E_i^{k+1} - E_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left((n_1)_i^{k+1} - (n_2)_i^{k+1} + (N_1)_i^{k+1} - (N_2)_i^{k+1} \right),
 \end{aligned}$$

где i – номер шага по высоте, k – номер шага по времени, h – шаг дискретизации по высоте, τ – шаг дискретизации по времени, σ – параметр аппроксимации, $\sigma \in [0, 1]$. На каждом шаге по времени уравнения системы (11) рассчитывались последовательно.

Для второго, третьего, четвертого и пятого уравнений системы (11) получена трехдиагональная матрица, которая решалась методом прогонки при условии выполнения требований к этому методу о устойчивости и сходимости [7].

Выясним, при каких условиях численная схема является устойчивой. Второе, третье, четвертое и пятое уравнения системы (11), записанные в операторном виде, выглядят следующим образом:

$$I \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau} + \sigma A n^{j+1} + (1-\sigma) A n^j = Q,$$

где I – единичная матрица, A – оператор, имеющий структуру вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

В каноническом виде получаем

$$(I + \sigma \tau A) \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau} + A n^j = Q.$$

Для второго и третьего уравнений системы (11):

На главной диагонали стоят коэффициенты вида

$$\frac{1}{\tau} + \frac{\sigma \cdot \chi_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} + \frac{\sigma \cdot \chi_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} + \sigma \cdot \eta_1 \cdot (n_{2,1})_i^{k+1}$$

соответственно. Поскольку коэффициент турбулентности имеет положительный знак, то следующие два слагаемых положительны; последнее слагаемое положительно; т.е. данные коэффициенты положительные. На нижней и верхней диагонали стоят коэффициенты вида

$$-\frac{\sigma \chi_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} \quad \text{и} \quad -\frac{\sigma \chi_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2}$$

соответственно. Эти коэффициенты отрицательные.

Для четвертого и пятого уравнений системы (11):

На главной диагонали стоят коэффициенты вида

$$\frac{1}{\tau} + \frac{\sigma \cdot D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} + \frac{\sigma \cdot D_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} + \sigma \cdot \alpha \cdot (n_{2,1})_i^{k+1} + \sigma \cdot \eta_1 \cdot (N_{2,1})_i^{k+1} + \sigma \cdot \eta_2 \cdot (N_0)_i^{k+1}$$

соответственно. Поскольку коэффициент турбулентности имеет положительный знак, то следующие два слагаемых положительны; последние слагаемые положительны в силу положительности всех входящих в них величин и отсутствия разности в выражении – значит данные коэффициенты положительные. На нижней и верхней диагонали стоят коэффициенты вида

$$\mp \frac{\sigma b_{1,2} E_{i-1}^{k+1}}{2h} - \frac{\sigma D_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2} \quad \text{и} \quad \pm \frac{\sigma b_{1,2} E_{i+1}^{k+1}}{2h} - \frac{\sigma D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}}{h^2}$$

соответственно.

Шаг дискретизации не может быть выбран больше $0,5M$ (так как интересуют значения на высотах 0,5, 1 и 2 метра), значение множителя входящего в коэффициент турбулентности, как будет указано ниже, рассматривается в пределах $D_1 \in [0,01..0,1]$.

Из приведенных данных следует, что оператор A - несамосопряженный, со значительным диагональным преобладанием (обеспечивается в большей степени слагаемыми $\sigma \cdot \eta_1 \cdot (n_{2,1})_i^{k+1}$ и $\sigma \cdot \alpha \cdot (n_{2,1})_i^{k+1} + \sigma \cdot \eta_1 \cdot (N_{2,1})_i^{k+1} + \sigma \cdot \eta_2 \cdot (N_0)_i^{k+1}$ на главной диагонали соответственно для второго, третьего, четвертого и пятого уравнений системы (11)). Поскольку на главной диагонали стоят коэффициенты больше нуля и выполняется условие диагонального преобладания, то оператор положительно определен. Разностная схема с несамосопряженным, положительно определенным оператором A является абсолютно устойчивой [7] ко входным данным при $\sigma \geq 0,5$.

Трёхдиагональный вид полученной системы линейных алгебраических уравнений (11) и выполнение условия диагонального преобладания для второго, третьего, четвертого и пятого уравнений позволяет решать их методом прогонки [2]. Шестое уравнение (уравнение Пуассона) решается методом последовательных приближений.

В качестве параметров моделирования выбиралось значение шага дискретизации по расстоянию $h_1 = 0,1M$ и значение параметра $\sigma = 0,5$. Шаг по времени выбирался, равным шагу по дискретизации: $\tau = 0,1c$. Система (11) решалась с числом Куранта равным 0,5.

Таким образом, полученные параметры позволяют проводить моделирование на современных вычислительных средствах.

Моделирование электродинамического состояния атмосферного приземного слоя

На рис. 1-2 приведены модельные расчеты электрических характеристик атмосферного приземного слоя для различных физических условий. Время установления стационарной электродинамической структуры турбулентного приземного слоя составляет порядка 15 мин и увеличивается с увеличением концентрации аэрозольных частиц, что совпадает с результатами, приведенными в работе [4,5] в случаях малых концентраций или отсутствия аэрозольных частиц (рис. 3, 4).

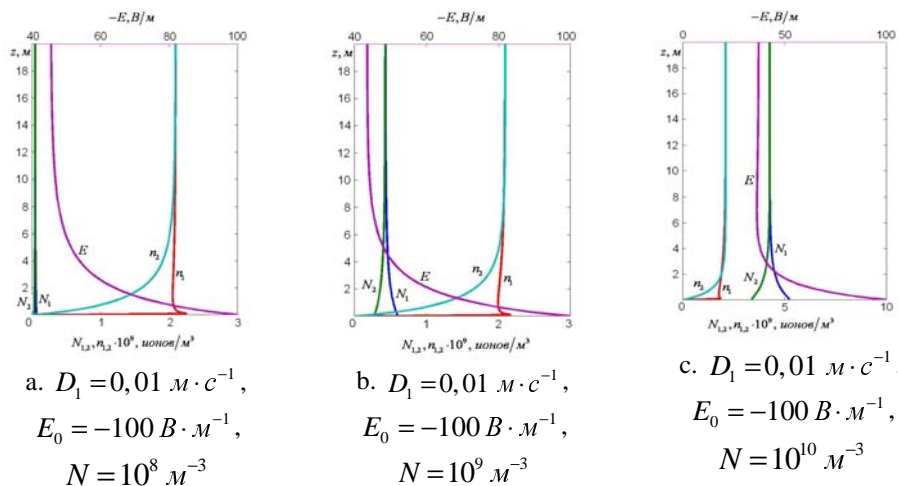


Рис. 1. Электродинамическая структура приземного слоя при слабом турбулентном перемешивании

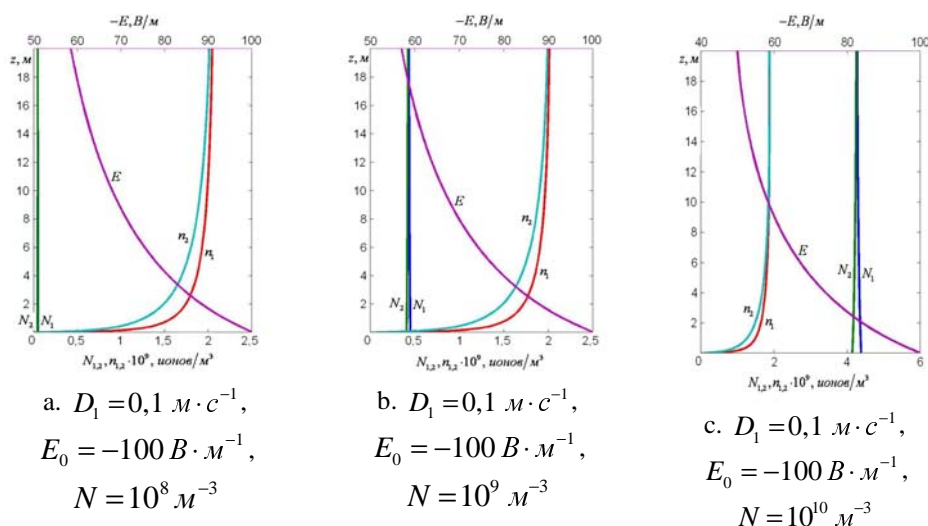


Рис. 2. Электродинамическая структура приземного слоя при сильном турбулентном перемешивании

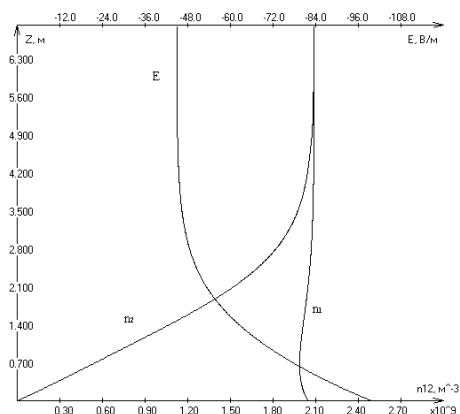


Рис. 3. Классический электродный эффект (без аэрозоля) при $E_0 = -100 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$

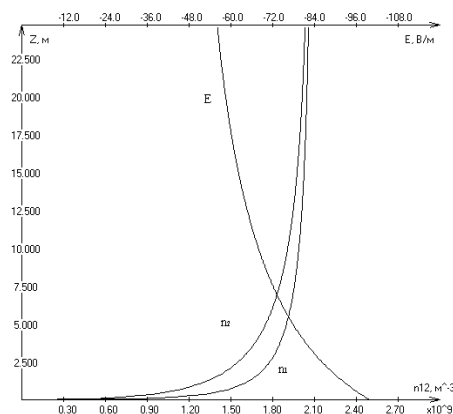


Рис. 4. Турбулентный электродный эффект (без аэрозоля) при $D_1 = 0,1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $E_0 = -100 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$

Анализ представленных расчетов показывает, что разработанная численная модель позволяет рассчитывать электродинамическую структуру атмосферного приземного слоя в приближении электродного эффекта как при малых, так и при больших концентрациях аэрозольных частиц. Переход к приближению классического электродного эффекта происходит при малых значениях ($D_1 \sim 0,01 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$) коэффициентов турбулентного перемешивания (рис. 1). При малых концентрациях аэрозольных частиц ($N \leq 5 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$), результаты совпадают с турбулентным электродным эффектом в чистой атмосфере (рис. 2). При достаточно больших концентрациях аэрозольных частиц ($N \geq 10^{10} \text{ м}^{-3}$) в атмосфере, электрическое состояние приземного слоя может определяться только тяжелыми ионами, образовавшимися за счет взаимодействия аэрозоля с легкими ионами.

Заключение

Разработанная модель адекватно описывает электродинамическое состояние атмосферного приземного слоя. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с известными моделями электродного эффекта. Таким образом, модель может служить инструментом для дальнейших исследований электродинамических процессов в атмосферном приземном слое при различных физических условиях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. — Таганрог. Изд-во ТРТУ, 1998. — 123 с.
2. *Latham D.G., Poor H.W.* A time-dependent model of the electrode effect // *J. Geoph. Res.* V.77, N 15. 1972. — P.2669-2676.
3. *Красногорская Н.В.* Электричество нижних слоев атмосферы и методы его измерения. — Л.: Гидрометеиздат, 1972. — 323 с.
4. *Куповых Г.В., Марченко А.Г., Морозов В.Н.* Электрическая структура нестационарного приземного слоя в приближении классического электродного эффекта // *Известия высших учебных заведений. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. Приложение № 4.* 2005. — С. 31–37.

5. *Куповых Г.В., Марченко А.Г., Морозов В.Н.* Электрическая структура нестационарного приземного слоя в приближении турбулентного электродного эффекта // Известия высших учебных заведений. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. Приложение № 5. 2005. — С. 46–51.
6. *Морозов В.Н.* Об установлении стационарного электрического поля в атмосфере, содержащей слой аэрозольных частиц // Прикладная метеорология. 2002. Выпуск 4 (552). — С. 33-43.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики // 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

Редин Александр Александрович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: alexandr_redin@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)321-617.

Кафедра физики; аспирант, инженер.

Redin Alexander Alexandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: alexandr_redin@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)321-617.

The Department of Physics; post graduate student; engineer.

Клово Александр Георгиевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: klovo@egf.tsure.ru

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; доцент.

Klovo Alexander Georgievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: klovo@egf.tsure.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634) 371-606.

The Department of Higher Mathematics; associate professor.

Куповых Геннадий Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: kupovykh@users.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-649.

Кафедра физики; заведующий кафедрой; профессор.

Kupovykh Gennady Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: kupovykh@users.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-649.

The Department of Physics; Head of Department; professor.

Морозов Владимир Николаевич

Главная Геофизическая Обсерватория им. Воейкова, заведующий отделом атмосферного электричества, доктор физико-математических наук, профессор.

E-mail: vn.morozov@inbox.ru

Россия, Ленинградская область, г. Санкт-Петербург, ул. Карбышева д.7 д.т. 3938678.

Тел.: +7(812)3938678.

Morozov Vladimir Nikolaevich

Main Geophysical Observatory of A.I. Voeikov, the Head of Department of Atmospheric Electricity, Doctor of Physico-mathematical Sciences.

E-mail: vn.morozov@inbox.ru.

7, Karbysheva Street, Leningrad region, St.-Petersburg, 3938678, Russia,

Phone: +7(812)3938678.

УДК 621.382.22

А.Г. Захаров, С.А. Богданов, А.А. Лытюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В БАРЬЕРАХ ШОТТКИ НА ОСНОВЕ СОЕДИНЕНИЯ $Si_{1-x}Ge_x$

В работе обсуждаются вопросы моделирования распределения потенциала в области пространственного заряда полупроводника контакта металл- $Si_{1-x}Ge_x$, с учетом особенностей распределения электрически активных примесей в полупроводнике, обусловленных различными технологическими процессами, применяемыми при изготовлении элементов интегральных схем.

Полупроводниковое соединение $Si_{1-x}Ge_x$; уравнение Пуассона; молекулярно-лучевая эпитаксия; метод Монте-Карло; ионное легирование; распределение Гаусса; распределение Пирсона; метод конечных разностей.

A.G. Zakharov, S.A. Bogdanov, A.A. Lytyuk

SIMULATION OF POTENTIAL DISTRIBUTION IN SHOTTKY BARRIERS ON BASIS OF $Si_{1-x}Ge_x$

Simulation of potential distribution in semiconductor space-charge region of metal- $Si_{1-x}Ge_x$ contact is discussed. Characteristics of electrically active impurities distribution in semiconductor, caused by different technological processes for integrated circuits manufacturing, are taken into account during simulation.

Semiconductor compound $Si_{1-x}Ge_x$; Poisson equation; molecular-beam epitaxy; Monte-Carlo method; ion implantation; Gauss distribution; Pirson distribution; finite differences method.

Математическое моделирование находит все более широкое применение в твердотельной электронике. Это связано, прежде всего, с необходимостью описания технологических процессов и приборов, отличающихся чрезвычайно сложностью и часто неравновесным и нестационарным характером. Кроме того, переход к нанометрическим размерам усилил взаимосвязь между электрофизическими характеристиками элементов твердотельной электроники и технологическими режимами их производства.