

Раздел III. Математическое моделирование в биологии

УДК 519.63:532.55

А.В. Никитина

МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ, СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА

Предложены математические модели биологической кинетики, учитывающие таксис зоопланктона и рыб. Для численного решения задач использовались неявные конечно-разностные схемы второго порядка точности. Устойчивость полученного решения задач позволила проводить вычислительные эксперименты в широком диапазоне значений управляющих параметров. Результаты показали, что таксис зоопланктона и рыб влияет на функционирование системы в экологических условиях Таганрогского залива.

Математическая модель; таксис; биологическая кинетика; Таганрогский залив, алгоритм.

A.V. Nikitina

BIOLOGY KINETIC MODELS STABILISING ECOLOGICAL SISTEM OF TAGANROG BAY

The mathematical biology kinetic models included the zooplankton and fish taxis are derived. The numerical solution of the models are obtained by using the second order accuracy (in space and time), centered, implicit finite difference scheme. The numerical solution is steady; it allows carrying out experiments with a wide range of initial and boundary conditions and values of managing parameters. The results show that the zooplankton and fish taxis influence on the system functioning in ecological conditions of the Taganrog bay.

Mathematical model; taxis; biology kinetic; Taganrog bay; algorithm.

Цель работы заключалась в построении вычислительно устойчивых алгоритмов реализации моделей биологической кинетики, учитывающих движение водной среды, микротурбулентную диффузию, температурный режим, соленость, эффект наружно-гормонального стимулирования, таксис зоопланктона и рыб в реальной области сложной формы – Таганрогский залив.

Одной из важных проблем, связанных с экологией, является прогнозирование запасов промысловых гидробионтов в целях обеспечения оптимального изъятия, сохранения и воспроизводства морских биоресурсов.

Конечная цель математического исследования биогеоценозов заключается в создании количественной теории биологической продуктивности экосистем как основы управления их биологическими ресурсами для получения продуктов полезных для человека.

Любая природная экосистема уникальна, и недопустимо воздействовать на нее без оценки риска вызвать в ней необратимые изменения.

Биология, в частности ихтиология, ставит перед математикой задачу описания динамики весьма сложных, заведомо нелинейных с изменяющейся структурой систем [1].

При моделировании динамики рыбных популяций в Таганрогском заливе учитывались следующие факторы:

- ◆ запас, структура, качество стада, пространственное распределение (численности, веса, плотности);
- ◆ гидрометеорологические факторы, корм, хищники, промысел и т.д.;
- ◆ воспроизводство, питание, рост, миграции и т.д.

В качестве объектов моделирования выбраны рыбы – тюлька и судак. Такой выбор обусловлен их большим промысловым значением.

Модель строится в предположении, что на численность популяции судака и тюльки влияют сезонные колебания температуры, солености, промысловый вылов, движение водной среды и протекающие в ней диффузионные процессы. В модели также учитывается взаимодействие самих популяций. В связи с тем, что появившиеся на свет мальки судака сначала питаются зоопланктоном, но уже через несколько недель начинают хищничать, поедая еще меньшее по размерам потомство других рыб, в модели не учитывается выедание судаком фито и зоопланктона. Значения солености, температуры, вылова, поле скоростей водного потока являются входными данными.

Естественную смертность тюльки и судака будем считать несущественной. Молодь тюльки погибает при съедании ее судаком. При отсутствии питания родившиеся особи судака и тюльки обречены на смерть.

Поля течений оказывают влияние, прежде всего на рыбные популяции, обитающие стайкой (в нашей модели на популяцию тюльки), способствуя их смещению и перемешиванию в водной среде.

Промысловый вылов имеет огромное влияние на динамику численности популяции судака и тюльки в Таганрогском заливе. Слишком большое и нерациональное изъятие может привести к сильному изменению численности популяций и поставить под угрозу воспроизводство и сохранение данных видов. Например, если будет интенсивно вылавливаться судак, его численность будет уменьшаться, а концентрация тюльки будет увеличиваться, так как тюлька служит кормовой базой судака. В свою очередь, увеличение численности тюльки может привести к уменьшению концентрации других видов рыб, ее пищевых конкурентов. Если же будет идти интенсивный вылов тюльки, то концентрация ее будет уменьшаться, следовательно, численность популяции судака будет падать, так как он будет ограничен в еде [2].

Рассмотрим систему уравнений, описывающую процесс динамики численности популяций промысловых рыб в некоторой трехмерной области G , представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_o , дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической боковой поверхностью

σ для временного интервала $0 < t \leq T$:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot X) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_x \frac{\partial X}{\partial z} \right) + (\alpha_X - k_X Z)X - \varepsilon_X X, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot Z) = \mu_Z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + (\alpha_Z X - k_Z T)Z - \varepsilon_Z Z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot T) = \mu_T \Delta T + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + (\alpha_T Z - k_T S)T - \delta_T T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \alpha_S T S - \delta_S S. \quad (4)$$

В системе (1) – (4) приняты обозначения:

X, Z, T, S – концентрации фитопланктона, зоопланктона, тюльки и судака соответственно;

$\bar{u} = (u, v, w)$ – поле скоростей водного потока; $\mu_X, \mu_Z, \mu_T, \mu_S, \nu_X, \nu_Z, \nu_T, \nu_S$ – коэффициенты диффузии X, Z, T, S в горизонтальном и вертикальном направлениях;

$\alpha_{X,Z,T,S}$ – скорости роста X, Z, T, S соответственно;

$\varepsilon_X, \varepsilon_Z$ – коэффициенты элиминации X, Z соответственно;

$k_{X,Z,T}$ – коэффициенты убыли X, Z, T за счет выедания;

δ_T, δ_S – коэффициенты вылова тюльки и судака соответственно.

$$\alpha_S = f(\tilde{T}, C) = \tilde{\Psi}(\tilde{T}) \cdot Y(C), \quad Y(C) = e^{-\left[\frac{C-C_{opt}}{\sigma_C}\right]^2},$$

где σ_C – стандартное отклонение, характеризующее ширину интервала толерантности;

C и \tilde{T} – соленость и температура воды соответственно.

$$\alpha_T = g(\tilde{T}) \cdot \tilde{\psi}(\tilde{T}), \quad g(\tilde{T}) = e^{-\left[\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_{opt1}}{\sigma_{\tilde{T}}}\right]^2}, \quad \tilde{\psi}(\tilde{T}) = e^{-\left[\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_{opt2}}{\sigma_{\tilde{T}}}\right]^2},$$

где \tilde{T}_{opt1} и \tilde{T}_{opt2} – оптимальные значения температуры для роста численности популяций тюльки и судака соответственно, $\sigma_{\tilde{T}}$ – стандартное отклонение температуры, характеризующее величину интервала толерантности.

К системе (1) – (4) необходимо добавить начальные условия:

$$X(x, y, z, 0) = X_0(x, y, z), \quad Z(x, y, z, 0) = Z_0(x, y, z),$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad S(x, y, z, 0) = S_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad t = 0. \quad (5)$$

Пусть n – вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_n \cup \sigma$,

u_n – нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Зададим граничные условия:

$$\begin{aligned} X = Z = S = T = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n < 0; \\ \frac{\partial X}{\partial n} = 0, \frac{\partial Z}{\partial n} = 0, \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \geq 0; \\ \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \text{ на } \Sigma_0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\gamma X, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_H, \quad (6)$$

где γ – неотрицательное постоянное, учитывающее опускание водорослей на дно и их затопление.

При моделировании динамики промысловых рыб в Таганрогском заливе начальные условия задавались следующим образом (рис. 1):



Рис. 1. Схема Таганрогского залива

$$X(x,y,0) = X_0(x,y), Z(x,y,0) = Z_0(x,y), T(x,y,0) = T_0(x,y), S(x,y,0) = S_0(x,y), \quad (7)$$

где $(x,y) \in \bar{\sigma}$, $X_0(x,y)$, $Z_0(x,y)$, $T_0(x,y)$ и $S_0(x,y)$ – известные функции.

При задании граничных условий (8) учитывался водообмен Таганрогского залива с Азовским морем: $X|_{\sigma_1} = 0, Z|_{\sigma_1} = 0, T|_{\sigma_1} = 0, S|_{\sigma_1} = 0$ – концентрации X, Z, T, S на берегу; $T|_{\sigma_2} = \varphi(x, y), S|_{\sigma_2} = \Psi(x, y)$ – концентрации T, S в месте соединения Таганрогского залива с Азовским морем, где $\varphi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ – известные функции.

Пространственно-неоднородная, нелинейная модель биологической кинетики на примере модели динамики фитопланктона, судака и тюльки (1–8) была численно реализована. Проведено исследование дискретной модели динамики промысловых рыб в Таганрогском заливе. Определены необходимые и достаточные условия устойчивости схемы, реализующей построенную модель.

Подобраны оптимальные значения параметров, входящих в модель. Исследовано влияние солености и температуры на концентрацию судака и тюльки. Для популяции судака оптимальной является температура $\tilde{T}_0 = 20^\circ C$, для популяции тюльки – $\tilde{T}_1 = 17^\circ C$. Установлено, что для популяции судака лучшим значением солености является $C_0 = 20\text{‰}$.

Численные эксперименты показали, что зависимость популяции от внешних факторов характеризуется оптимальным значением и пределами толерантности. Существование и успешная жизнедеятельность популяции тюльки и судака возможны внутри интервала толерантности; причем по мере удаления от оптимума растет «подавляющее» влияние рассматриваемого фактора.

Модели биологической кинетики могут использоваться рыбными хозяйствами и научно-исследовательскими институтами в целях прогнозирования запасов, оптимального изъятия, сохранения и воспроизводства рыбных популяций. А так же с помощью построенных моделей можно провести оценку, анализ и прогнозирования экологического состояния мелководного водоема – Таганрогского залива.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Латун В.С.* Устойчивость системы фитопланктон-зоопланктон-рыба // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь, 2004. – № 10. – С. 211-218.
2. *Tuyutunov Yu., Titova L., Arditi R.* Predator interference emerging from trophotaxis // Ecological Complexity, 2008, – № 5. – С. 48-58.

Никитина Алла Валерьевна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: alla@vm.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; доцент.

Nikitina Alla Valerievna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: alla@vm.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; associate professor.

УДК 519.63:532.55

А.И. Сухинов, Ю.В. Першина

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ФИТОПЛАНКТОНА ПРИ НАЛИЧИИ МЕХАНИЗМА ЭКТОКРИННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Цель данной работы заключается в объяснении такой особенности динамики фитопланктона, как устойчивая неравномерность его распределения по водоему («пятнистость»). Задачей исследования является изучение этого явления при наличии механизма эктокринного регулирования и в его отсутствие. В результате исследования получены достаточные условия единственности решения задачи и сформулирована теорема.

Фитопланктон; метаболит; лимитирующий элемент; «пятнистость» распределения.

A.I. Sukhinov, J.V. Pershina

SUFFICIENT CONDITIONS OF UNIQUENESS FOR THE PROBLEM DECISION OF A PHYTOPLANKTON DYNAMICS IN THE PRESENCE OF THE MECHANISM ECTOCRINE REGULATIONS

The purpose of this work consists in an explanation of such feature of dynamics of a phytoplankton, as steady irregularity of his distribution on a reservoir. The problem of research is study-