Модели биологической кинетики могут использоваться рыбными хозяйствами и научно-исследовательскими институтами в целях прогнозирования запасов, оптимального изъятия, сохранения и воспроизводства рыбных популяций. А так же с помощью построенных моделей можно провести оценку, анализ и прогнозирование экологического состояния мелководного водоема – Таганрогского залива.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Латун В.С.* Устойчивость системы фитопланктон-зоопланктон-рыба // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севостополь, 2004. – № 10. – С. 211-218.
2. *Tyutyunov Yu., Titova L., Arditi R.* Predator interference emerging from trophotaxis // Ecological Complexity, 2008, – № 5. – С. 48-58.

Никитина Алла Валерьевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: alla@vm.tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606.
Кафедра высшей математики; доцент.

Nikitina Alla Valerievna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: alla@vm.tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606.
The Department of Higher Mathematics; associate professor.

УДК 519.63:532.55

А.И. Сухинов, Ю.В. Першина

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ФИТОПЛАНКТОНА ПРИ НАЛИЧИИ МЕХАНИЗМА ЭКТОКРИННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Цель данной работы заключается в объяснении такой особенности динамики фитопланктона, как устойчивая неравномерность его распределения по водоему («пятнистость»). Задачей исследования является изучение этого явления при наличии механизма эктокринного регулирования и в его отсутствии. В результате исследования получены достаточные условия единственности решения задачи и сформулирована теорема.

Фитопланктон; метаболит; лимитирующий элемент; «пятнистость» распределения.

A.I. Sukhinov, J.V. Pershina

SUFFICIENT CONDITIONS OF UNIQUENESS FOR THE PROBLEM DECISION OF A PHYTOPLANKTON DYNAMICS IN THE PRESENCE OF THE MECHANISM ECTOCRINE REGULATIONS

The purpose of this work consists in an explanation of such feature of dynamics of a phytoplankton, as steady irregularity of his distribution on a reservoir. The problem of research is studying of this phenomenon in the presence of the mechanism ectocrine regulations and in its absence. Sufficient conditions of uniqueness of the decision of a problem are received and the theorem is formulated as a result of research.

A phytoplankton; a metabolite; a limiting element; a «punctation» of distribution.

1. Постановка начально-краевой задачи

Математическая модель записывается в предположении, что в процессе жизнедеятельности фитопланктонной популяции выделяется биологически активный метаболит, концентрация которого влияет на скорость роста особей [1]. Здесь рассматривается упрощенная ситуация, когда развитие фитопланктона лимитируется единственным биогенным элементом (это может быть азот или фосфор), а внешние условия предполагаются близкими к оптимальным для данного вида.

Несмотря на такие упрощения, модель позволяет отразить важнейшие особенности динамики фитопланктона: прежде всего, устойчивую неравномерность его распределения по водоему ("пятнистость") [3], а также временную периодичность развития. Усложнение модели, получаемое за счет включения в систему других фитопланктонных популяций с учетом их взаимного влияния, позволяет объяснить устойчивость видового многообразия фитопланктонных ансамблей [4].

Рассмотрим систему из трех уравнений в некоторой трехмерной области G – области, представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_o, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x,y)$ и цилиндрической боковой поверхностью σ, для временного интервала $0 < t \le t_0$.

$$\frac{\partial X}{\partial t} + div\left(\vec{U}\,X\right) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) + k_1 XS - \alpha X, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\left(\vec{U}\,S\right) = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) - k_2 XS + \beta\left(S' - S\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + div\left(\vec{U}\,M\right) = \mu_M \Delta M + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M \frac{\partial M}{\partial z}\right) + k_3 X - \delta M, \qquad (3)$$

где X, S, M – концентрации фитопланктона, биогенного вещества и метаболита соответственно;

$\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор скоростей водного потока;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа;

μ_X, μ_S, μ_M – диффузионные коэффициенты в горизонтальных направлениях для фитопланктона, биогенного вещества и метаболита соответственно;

ν_X, ν_S, ν_M – диффузионные коэффициенты в вертикальном направлении для фитопланктона, биогенного вещества и метаболита соответственно;

k_1 – удельная скорость роста фитопланктона;

α – удельная смертность фитопланктона;

k_2 – удельная скорость потребления биогенного вещества;

k_3 – коэффициент экскреции;

δ – коэффициент распада метаболита;

β – удельная скорость распада биогенного вещества;

$f = f(x, y, z, t)$ – функция источника загрязнения.

Будем предполагать, что зависимости удельной скорости роста фитопланктона и удельной скорости потребления биогенного вещества от концентрации метаболита линейные, т.е.

$$k_1 = k_{10} + \gamma_1 M, \quad k_2 = k_{20} + \gamma_2 M\,. \tag{4}$$

Во многих случаях можно считать, что $k_1 = k_2$, что и предполагается в дальнейшем. Для системы (1–4) необходимо в любой момент времени задавать $\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор скоростей водного потока, а также начальные значения функций $X,\ S,\ M$:

$$\begin{aligned} X(x,y,z,0) &= X_0(x,y,z), \\ S(x,y,z,0) &= S_0(x,y,z), \\ M(x,y,z,0) &= M_0(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{G}, t = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Присоединим к системе (1-5) граничные условия. Будем считать что граница Σ цилиндрической области G является кусочно-гладкой и $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_o \cup \sigma$, где Σ_H – поверхность дна водоема, Σ_o – невозмущенная поверхность водной среды, σ – боковая (цилиндрическая) поверхность. Пусть u_n – нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока, n – вектор внешней нормали к Σ. Для концентраций $X,\ S,\ M$ будем предполагать, что

$$X = S = M = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \le 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial X}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial M}{\partial n} = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \ge 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \text{ на } \Sigma_o; \tag{8}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \varepsilon_1 X,\ \frac{\partial S}{\partial z} = \varepsilon_2 S,\ \frac{\partial M}{\partial z} = \varepsilon_3 M, \text{ на поверхности } \Sigma_H, \tag{9}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ – неотрицательные постоянные, ε_1 учитывает опускание водорослей на дно и их затопление; $\varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ учитывают поглощение биогенного вещества и метаболита донными отложениями.

2. Достаточные условия единственности решения при отсутствии механизма наружно-гормонального регулирования

Если $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$, то возможно ветвление решений системы, что соответствует " пятнистому " распределению фитопланктона. Пусть механизм эктокринного регулирования отсутствует, т.е. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Тогда первые два уравнения системы (1)-(3) вместе с соответствующими граничными и начальными условиями отделяются. Укажем в этом случае достаточные условия существования единственного решения. Сделаем дополнительные предположения о периодичности процесса, т.е.

$$X(x,y,z,t) = X(x,y,z,t+T),\ S(x,y,z,t) = S(x,y,z,t+T), \quad (10)$$

где $T > 0,\ T -$ период. Введем на поверхности Σ области G функции

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n,\ u_n \geq 0; \\ 0,\ u_n < 0; \end{cases} \text{ и } u_n^- = u_n - u_n^+. \quad (11)$$

Выполним разбиение временного интервала $0 \leq t \leq T$ на достаточно малые отрезки времени $t_{n-1} \leq t \leq t_n,\ n = 1,2,..,N,\ t_0 = 0,\ t_N = T$ и запишем линеаризованную на каждом из отрезков времени систему уравнений вида:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + div\left(\vec{U}\,X\right) = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) + k_1 X S^n - \alpha X, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\left(\vec{U}\,S\right) = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) - k_2 X^n S + \beta\left(S' - S\right), \quad (13)$$

с дополнительными условиями: начальными

$$\begin{aligned} &X(x,y,z,0) = X_0(x,y,z), \\ &S(x,y,z,0) = S_0(x,y,z),\ (x,y,z) \in \overline{G},\ t = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

и граничными

$$X = S = 0 \text{ на } \sigma \text{, если } u_n \leq 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial X}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \text{ на } \sigma \text{, если } u_n \geq 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \text{ на } \Sigma_o; \quad (17)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \varepsilon_1 X,\ \frac{\partial S}{\partial z} = \varepsilon_2 S, \text{ на поверхности } \Sigma_H. \quad (18)$$

Получим квадратичный функционал, который используется для доказательства единственности решения задачи (11–17). Для этого умножим обе части уравнения (11) и (12) соответственно на функции X и S и проинтегрируем каждое из полученных равенств по области G и по временной переменной t, $t_n \le t \le t_{n+1}$ и затем просуммируем по $n = 1, 2, ..., n_0$, и, складывая полученные равенства, в итоге получим

$$\int_0^T dt \int_G \frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G X divU X dG + \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2}\frac{\partial S^2}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G S divU S dG =$$
$$= \mu_X \int_0^T dt \int_G X \Delta X dG + \int_0^T dt \int_G X \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) dG + k_1 \sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG\right) - \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \quad (19)$$
$$+ \mu_S \int_0^T dt \int_G S \Delta S dG + \int_0^T dt \int_G S \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) dG - k_1 \sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG\right) - \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG + \int_0^T dt \int_G f S dG.$$

В силу соотношений (10) имеем тождества

$$\int_0^T dt \int_G \frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial t} dG = 0, \quad \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial t} dG = 0 \cdot \quad (20)$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса, получаем равенства

$$\int_G X divU X dG = \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Sigma, \quad \int_G S divU S dG = \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Sigma. \quad (21)$$

Преобразуем левую часть соотношения (19), используя формулы (20) и (21), и придем к равенству

$$\int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Sigma = \mu_X \int_0^T dt \int_G X \Delta X dG + \int_0^T dt \int_G X \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) dG +$$
$$+ k_1 \sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG\right) - \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \mu_S \int_0^T dt \int_G S \Delta S dG + \quad (22)$$
$$+ \int_0^T dt \int_G S \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) dG - k_1 \sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG\right) - \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG + \int_0^T dt \int_G f S dG.$$

В соответствии с формулой Грина и с учетом граничных условий (15-18), получаем цепочку равенств

$$\mu_X\int_0^T dt\int_G X\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)dG+\int_0^T dt\int_G X\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X\frac{\partial X}{\partial z}\right)dG+\int_0^T dt\int_G S\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z}\right)dG+$$
$$+\mu_S\int_0^T dt\int_G S\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)dG=-\mu_X\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG-$$
$$-\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG+\mu_X\int_0^T dt\int_\Sigma X\frac{\partial X}{\partial n}d\Sigma+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\nu_X X\frac{\partial X}{\partial z}d\Sigma+$$
$$+\mu_S\int_0^T dt\int_\Sigma S\frac{\partial S}{\partial n}d\Sigma+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\nu_S S\frac{\partial S}{\partial z}d\Sigma=-\mu_X\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG-$$
$$-\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG-\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_1\nu_X X^2 d\Sigma-\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG-$$
$$-\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG-\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_2\nu_S S^2 d\Sigma. \qquad (23)$$

Принимая во внимание равенство (23), преобразуем правую часть соотношения (22). Выражение для квадратичного функционала запишем в виде

$$I=\int_0^T dt\int_\Sigma\frac{u_n^+}{2}X^2 d\Sigma+\int_0^T dt\int_\Sigma\frac{u_n^+}{2}S^2 d\Sigma+\mu_X\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG+$$
$$+\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_1\nu_X X^2 d\Sigma+\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG+ \qquad (24)$$
$$+\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_2\nu_S S^2 d\Sigma-k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\int_G X^2 S^n dG\right)+\alpha\int_0^T dt\int_G X^2 dG-$$
$$+k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\int_G S^2 X^n dG\right)+\beta\int_0^T dt\int_G S^2 dG-\int_0^T dt\int_G fSdG.$$

Пусть H_x, H_y, H_z – максимальные размеры области G в направлении координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно. Справедливы неравенства Пуанкаре

$$\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG\ge\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^T dt\int_G \nu_X X^2 dG,$$
$$\int_0^T dt\int_G \mu_X\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG\ge 4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^T dt\int_G X^2 dG.$$

Заменим выражения в левой части функционала I в соответствии с приведенными выше неравенствами на не превосходящие их члены, построив, таким образом, функционал $\tilde{\mathrm{I}}$

$$\tilde{I}=\int_0^T dt\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}X^2 d\Sigma+\int_0^T dt\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}S^2 d\Sigma+\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^T dt\int_G \nu_X X^2 dG+4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^T dt\int_G X^2 dG+ \tag{25}$$

$$+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_1\nu_X X^2 d\Sigma-k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G X^2 S^n dG\right)+\alpha\int_0^T dt\int_G X^2 dG+$$

$$+\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG+\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_2\nu_S S^2 d\Sigma+$$

$$+k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G S^2 X^n dG\right)+\beta\int_0^T dt\int_G S^2 dG-\int_0^T dt\int_G fS dG.$$

Положим вначале $n_0=1$. Пусть на первом временном интервале $t_0\le t\le t_1$ выполняется неравенство

$$4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)+4\min_G\{\nu_X\}\frac{1}{(H_z)^2}+\alpha-k_1\max_G\{S^0\}\ge 0\,. \tag{26}$$

Предположим, что решение системы (12)-(18) неединственно, т.е.

$$w=X'-X''\ne 0,\ \ \omega=S'-S''\ne 0. \tag{27}$$

Функционал $\tilde{\mathrm{I}}$ для функций w и ω имеет вид

$$\tilde{I}=\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}w^2 d\Sigma+\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}\omega^2 d\Sigma+\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^{t_1} dt\int_G \nu_X w^2 dG+4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^{t_1} dt\int_G w^2 dG$$

$$+\int_0^{t_1} dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_1\nu_X w^2 d\Sigma-k_1\int_0^{t_1} dt\int_G w^2 S^0 dG+\alpha\int_0^{t_1} dt\int_G X^2 dG+$$

$$+\mu_S\int_0^{t_1} dt\int_G\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right)dG+\int_0^{t_1} dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 dG+\int_0^{t_1} dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_2\nu_S\omega^2 d\Sigma+$$

$$+k_1\int_0^{t_1} dt\int_G\omega^2 X^0 dG+\beta\int_0^{t_1} dt\int_G\omega^2 dG=0.$$

С другой стороны, в силу неравенства (26), имеем $\tilde{\mathrm{I}}>0$. Пришли к противоречию, в силу которого $w=0,\ \omega=0$ для $0<t\le t_1$. Аналогично для любого $n=1,\dots,n_0-1$ в предположении

$$4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)+4\min_G\{\nu_X\}\frac{1}{(H_z)^2}+\alpha-k_1\max_G\{S^n\}\geq 0 \quad (28)$$

доказывается единственность решения задачи (12-18). Далее будем условие (28) считать достаточным условием единственности решения задачи (12-18).

3. Некоторые условия единственности решений при наличии механизма эктокринного регулирования

Пусть $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$. Укажем достаточные условия существования единственного решения. Сделаем дополнительные предположения о периодичности процесса, т.е.

$$\begin{gathered}X(x,y,z,t)=X(x,y,z,t+T),\\ S(x,y,z,t)=S(x,y,z,t+T),\\ M(x,y,z,t)=M(x,y,z,t+T),\end{gathered} \quad (29)$$

где $T>0, T-$ период. Введем на поверхности Σ области G функции

$$u_n^+=\begin{cases}u_n, & u_n\geq 0;\\ 0, & u_n<0;\end{cases} \text{ и } u_n^-=u_n-u_n^+. \quad (30)$$

Выполним разбиение временного интервала $0\leq t\leq T$ на достаточно малые отрезки времени $t_{n-1}\leq t\leq t_n,\ n=1,2,..,N,\ t_0=0,\ t_N=T$ и запишем линеаризованную на каждом из отрезков времени систему уравнений вида:

$$\frac{\partial X}{\partial t}+div\left(\vec{U}X\right)=\mu_X\Delta X+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X\frac{\partial X}{\partial z}\right)+k_1XS^n-\alpha X, \quad (31)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+div\left(\vec{U}S\right)=\mu_S\Delta S+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z}\right)-k_2X^nS+\beta\left(S'-S\right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+div\left(\vec{U}M\right)=\mu_M\Delta M+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M\frac{\partial M}{\partial z}\right)+k_3X^nM-\delta M, \quad (33)$$

с дополнительными условиями: начальными

$$\begin{aligned}&X(x,y,z,0)=X_0(x,y,z),\\ &S(x,y,z,0)=S_0(x,y,z),\\ &M(x,y,z,0)=M_0(x,y,z),\ (x,y,z)\in\overline{G}, t=0.\end{aligned} \quad (34)$$

и граничными

$$X=S=M=0 \text{ на } \sigma \text{, если } u_n\leq 0; \quad (35)$$

$$\frac{\partial X}{\partial n}=0,\ \frac{\partial S}{\partial n}=0,\ \frac{\partial M}{\partial n}=0, \text{ на } \sigma \text{, если } u_n\geq 0; \quad (36)$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=0,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0,\ \frac{\partial M}{\partial z}=0,\ \text{на}\ \ \Sigma_{\text{о}}; \tag{37}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\varepsilon_1 X,\ \frac{\partial S}{\partial z}=\varepsilon_2 S,\ \frac{\partial M}{\partial z}=\varepsilon_3 M,\ \text{на поверхности}\ \Sigma_{\text{Н}}. \tag{38}$$

Получим квадратичный функционал, который используется для доказательства единственности решения задачи (31-38). Для этого умножим обе части уравнений (31), (32) и (33) соответственно на функции X , S и M и проинтегрируем каждое из полученных равенств по области G и по временной переменной $t,\ t_n \le t \le t_{n+1}$ и затем просуммируем по $n=1,2,\ldots,n_0$, и, складывая полученные равенства, в итоге получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial t}dG+\int_0^T dt\int_G XdivUXdG+\int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial S^2}{\partial t}dG+\int_0^T dt\int_G SdivUSdG+\int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial M^2}{\partial t}dG+\\
&+\int_0^T dt\int_G MdivUMdG=\mu_X\int_0^T dt\int_G X\Delta XdG+\int_0^T dt\int_G X\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X\frac{\partial X}{\partial z}\right)dG+k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dtX^2S^n dG\right)-\\
&-\alpha\int_0^T dt\int_G X^2dG+\mu_S\int_0^T dt\int_G S\Delta SdG+\int_0^T dt\int_G S\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z}\right)dG-k_2\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G S^2X^n dG\right)-\\
&-\beta\int_0^T dt\int_G S^2dG+\int_0^T dt\int_G fSdG+\mu_M\int_0^T dt\int_G M\Delta MdG+\int_0^T dt\int_G M\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M\frac{\partial M}{\partial z}\right)dG+\\
&+k_3\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G MX^n dG\right)-\delta\int_0^T dt\int_G M^2dG
\end{aligned} \tag{39}$$

В силу соотношений (29) имеем тождества

$$\int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial X^2}{\partial t}dG=0,\quad \int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial S^2}{\partial t}dG=0,\quad \int_0^T dt\int_G \frac{1}{2}\frac{\partial M^2}{\partial t}dG=0 \tag{40}$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса, получаем равенства

$$\begin{aligned}
&\int_G XdivU\,XdG=\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}X^2d\Sigma,\\
&\int_G SdivU\,SdG=\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}S^2d\Sigma\\
&\int_G MdivU\,MdG=\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}M^2d\Sigma
\end{aligned} \tag{41}$$

Преобразуем левую часть соотношения (39), используя формулы (40) и (41), и придем к равенству

$$\int_0^T dt\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}X^2 d\Sigma+\int_0^T dt\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}S^2 d\Sigma+\int_0^T dt\int_\Sigma \frac{u_n^+}{2}M^2 d\Sigma=$$
$$=\mu_X\int_0^T dt\int_G X\Delta X dG++\int_0^T dt\int_G X\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X\frac{\partial X}{\partial z}\right)dG+k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\int_G X^2 S^n dG\right)-$$
$$-\alpha\int_0^T dt\int_G X^2 dG+\mu_S\int_0^T dt\int_G S\Delta S dG+\int_0^T dt\int_G S\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z}\right)dG-$$
$$-k_1\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\int_G S^2 X^n dG\right)-\beta\int_0^T dt\int_G S^2 dG+\int_0^T dt\int_G fSdG+$$
$$+\mu_M\int_0^T dt\int_G M\Delta M dG+\int_0^T dt\int_G M\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M\frac{\partial M}{\partial z}\right)dG+$$
$$+k_3\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}dtMX^n dG\right)-\delta\int_0^T dt\int_G M^2 dG \qquad (42)$$

В соответствии с формулой Грина и с учетом граничных условий (35-38), получаем цепочку равенств

$$\mu_X\int_0^T dt\int_G X\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)dG+\int_0^T dt\int_G X\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X\frac{\partial X}{\partial z}\right)dG+\int_0^T dt\int_G S\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S\frac{\partial S}{\partial z}\right)dG+$$
$$+\mu_S\int_0^T dt\int_G S\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)dG+\mu_M\int_0^T dt\int_G M\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)dG+\int_0^T dt\int_G M\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M\frac{\partial M}{\partial z}\right)dG=$$
$$=-\mu_X\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG-$$
$$-\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG-$$
$$-\mu_M\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_M\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)^2 dG+$$
$$+\mu_X\int_0^T dt\int_\Sigma X\frac{\partial X}{\partial n}d\Sigma+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\nu_X X\frac{\partial X}{\partial z}d\Sigma+\mu_S\int_0^T dt\int_\Sigma S\frac{\partial S}{\partial n}d\Sigma+$$
$$+\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\nu_S S\frac{\partial S}{\partial z}d\Sigma+\mu_M\int_0^T dt\int_\Sigma M\frac{\partial M}{\partial n}d\Sigma++\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\nu_M M\frac{\partial M}{\partial z}d\Sigma=$$
$$=-\mu_X\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_X\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG-\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_1\nu_X X^2 d\Sigma-$$
$$-\mu_S\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_S\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG-\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_2\nu_S S^2 d\Sigma-$$
$$-\mu_M\int_0^T dt\int_G\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2\right)dG-\int_0^T dt\int_G \nu_M\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG-\int_0^T dt\int_{\Sigma_H}\varepsilon_3\nu_M M^2 d\Sigma \qquad (43)$$

Принимая во внимание равенство (43), преобразуем правую часть соотношения (42). Выражение для квадратичного функционала запишем в виде

$$
\begin{aligned}
I = &\int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} M^2 d\Sigma + \\
&+\mu_X \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_X \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_1 \nu_X X^2 d\Sigma + \\
&+\mu_S \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_S \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_2 \nu_S S^2 d\Sigma + \\
&+\mu_M \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_M \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_3 \nu_M M^2 d\Sigma - \\
&-k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) + \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + k_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG \right) + \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG - \\
&- \int_0^T dt \int_G fSdG - k_3 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G MX^n dG \right) - \delta \int_0^T dt \int_G M^2 dG \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Заменим предпоследнее слагаемое в выражении (44) в соответствии с неравенством $2ab \le a^2 + b^2$, что приведет к не возрастанию функционала *I*:

$$
\begin{aligned}
I \ge &\int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} M^2 d\Sigma + \\
&+\mu_X \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_X \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_1 \nu_X X^2 d\Sigma + \\
&+\mu_S \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_S \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_2 \nu_S S^2 d\Sigma + \\
&+\mu_M \int_0^T dt \int_G \left(\left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)^2 \right) dG + \int_0^T dt \int_G \nu_M \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_3 \nu_M M^2 d\Sigma - \\
&-k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) + \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + k_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X dG \right) + \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG - \\
&- \int_0^T dt \int_G fSdG - \frac{1}{2} k_3 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G \left(M^2 + \left(X^n \right)^2 \right) dG \right) - \delta \int_0^T dt \int_G M^2 dG \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Пусть $\mathrm{H_x}, \mathrm{H_y}, \mathrm{H_z}$-максимальные размеры области G в направлении координатных осей $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ соответственно. Справедливы неравенства Пуанкаре

$$\int_0^T dt \int_G \nu_X \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG \ge \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{X_0} \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 dG, \quad \nu_{X_0} = \max_{G, 0\le t\le T} \{\nu_X (x,y,z,t)\}$$

$$\int_0^T dt \int_G \mu_X \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right) dG \ge 4\mu_X \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G X^2 dG,$$

$$\int_0^T dt \int_G \nu_S \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG \ge \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{S_0} \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 dG, \quad \nu_{S_0} = \max_{G, 0\le t\le T} \{\nu_S (x,y,z,t)\}$$

$$\int_0^T dt \int_G \mu_S \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) dG \ge 4\mu_S \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G S^2 dG,$$

$$\int_0^T dt \int_G \nu_M \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)^2 dG \ge \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{M_0} \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)^2 dG, \quad \nu_{M_0} = \max_{G, 0\le t\le T} \{\nu_M (x,y,z,t)\}$$

$$\int_0^T dt \int_G \mu_M \left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2\right) dG \ge 4\mu_M \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G M^2 dG.$$

Заменим выражения в левой части функционала I в соответствии с приведенными выше неравенствами на не превосходящие их члены, построив, таким образом, функционал $\tilde{\mathrm{I}}$, $\mathrm{I} \ge \tilde{\mathrm{I}}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = {} & \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Sigma + \int_0^T dt \int_\Sigma \frac{u_n^+}{2} M^2 d\Sigma + \\
& + 4\mu_X \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{X_0} X^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_1 \nu_X X^2 d\Sigma + \\
& + 4\mu_S \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G S^2 dG + \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{S_0} S^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_2 \nu_S S^2 d\Sigma + \\
& + 4\mu_M \left(\frac{1}{(H_x)^2} + \frac{1}{(H_y)^2}\right) \int_0^T dt \int_G M^2 dG + \frac{4}{(H_z)^2} \int_0^T dt \int_G \nu_{M_0} M^2 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \varepsilon_3 \nu_M M^2 d\Sigma - \\
& - k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) + \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + k_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X dG \right) + \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG - \\
& - \int_0^T dt \int_G f S dG - \frac{1}{2} k_3 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G \left(M^2 + \left(X^n\right)^2\right) dG \right) - \delta \int_0^T dt \int_G M^2 dG
\end{aligned} \tag{46}$$

Представим преобразованные слагаемые в виде

$$4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^T dt\int_G X^2 dG=4\mu_X\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G X^2 dG\right)$$

$$\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^T dt\int_G \nu_{X_0} X^2 dG=\frac{4}{(H_z)^2}\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G \nu_{X_0} X^2 dG\right)$$

$$4\mu_S\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^T dt\int_G S^2 dG=4\mu_S\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G S^2 dG\right)$$

$$\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^T dt\int_G \nu_{S_0} S^2 dG=\frac{4}{(H_z)^2}\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G \nu_{S_0} S^2 dG\right)$$

$$4\mu_M\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\int_0^T dt\int_G M^2 dG=4\mu_M\left(\frac{1}{(H_x)^2}+\frac{1}{(H_y)^2}\right)\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G M^2 dG\right)$$

$$\frac{4}{(H_z)^2}\int_0^T dt\int_G \nu_{M_0} M^2 dG=\frac{4}{(H_z)^2}\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\int_G \nu_{M_0} M^2 dG\right).$$

Соберем слагаемые, содержащие X^2, S^2, M^2

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\int_G\left(\frac{4\nu_X}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_y)^2}-k_1S^n+\alpha\right)X^2dG\right)dt\right)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\int_G\left(\frac{4\nu_S}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_y)^2}+k_2X^n+\beta\right)S^2dG\right)dt\right)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\int_G\left(\frac{4\nu_M}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_y)^2}-\frac{1}{2}k_3+\delta\right)M^2dG\right)dt\right)$$

Потребуем, чтобы слагаемые при X^2, S^2, M^2 были положительными

$$\frac{4\nu_{X_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_y)^2}-k_1\left\|S^n\right\|+\alpha>0$$

$$\frac{4\nu_{S_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_y)^2}+k_2\left\|X^n\right\|+\beta>0 \qquad (47)$$

$$\frac{4\nu_{M_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_y)^2}-\frac{1}{2}k_3+\delta>0.$$

Условия (47) можно считать достаточными для существования единственного решения при наличии механизма эктокринного регулирования.

Теорема. Пусть решение задачи (31-38) существует, функции

$$X(x,y,z),\ S(x,y,z),\ M(x,y,z)$$

принадлежат классу

$$C^2(G)\cap C^1(\overline{G})\cap C^1(0<t\le T),\ \nu_X(z),\nu_S(z),\ \nu_M(z)\in C^1(\overline{G}),$$

$$f(x,y,z,t)\in C(\overline{G})$$

и Σ цилиндрической области G является кусочно-гладкой. Тогда при выполнении неравенств

$$\frac{4\nu_{X_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_X}{(H_y)^2}-k_1\left\|S^n\right\|+\alpha>0;$$

$$\frac{4\nu_{S_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_S}{(H_y)^2}+k_2\left\|X^n\right\|+\beta>0;$$

$$\frac{4\nu_{M_0}}{(H_z)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_x)^2}+\frac{4\mu_M}{(H_y)^2}-\frac{1}{2}k_3+\delta>0$$

для любого $n=1,2,..,N$, решение задачи (31-38) единственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Домбровский Ю.А., Маркман Г.С.* Пространственная и временная упорядоченность в экологических и биохимических системах, 1990. – С. 17.
2. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Об исследовании условий существования и единственности решений для системы уравнений динамики фитопланктона // Известия ТРТУ, Спец. выпуск, 2001. – С. 222-227.
3. *Тузинкевич А.В., Фрисман Е.Я.* Диссипативные структуры и пятнистость пространственного распределения организмов. Биофизика. 1988. – С. 333-337.
4. *Hutchinson G.E.* The paradox of the plankton, American Naturalist, 1961. – P. 137-145.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Chief of TIT SFedU; professor.

Першина Юлия Валериевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: yuliapershina@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606; 8(904)347-17-78.
Кафедра высшей математики; студентка.

Pershina Julia Valerievna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: yuliapershina@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606; 8(904)347-17-78
The Department of Higher Mathematics; student.

УДК 518.5.001.57

И.А. Кажарова

МОЗАИЧНАЯ СТРУКТУРА РАСПРЕДЕЛЕННОГО СООБЩЕСТВА ТРАНСГЕННОЙ КУКУРУЗЫ

Цель данной работы: построение модели пространственно-временной динамики двувидового сообщества кукурузы (обычной и трансгенной), учитывающую нелокальные взаимодействия между ними; в зависимости от механизмов, лежащих в основе модели, изучить условия возникновения пятнистости пространственного распределения кукурузы. Был проведен анализ структуры пространственно неоднородных решений. Показано, что учет пространственных взаимодействий приводит к появлению пятнистости (диссипативных структур) как стационарных, так и нестационарных (периодических в окрестности точки бифуркации).

Трансгенная кукуруза; плотность биомассы; динамическая устойчивочть (неустойчивость); вегетативное размножение.

I.A. Kazharova

MOSAIC STRUCTURE OF THE DISTRIBUTED TRANSGENE CORN COMMUNITY

In the given work the model of existential dynamics of two-specific community of corn (usual and transgene), considering not local interactions between them is under construction. Depending on the mechanisms underlying model, occurrence conditions пятнистости spatial distribution of corn are studied. The analysis of structure of spatially non-uniform decisions is carried out. It is shown, that the account of spatial interactions leads to occurrence spotted both stationary, and non-stationary.

Transgene corn; biomass density; dynamic stability (instability); vegetative reproduction.

Введение

Кукуруза входит в число лидеров мирового земледелия, занимая по урожайности (36,5 ц/га) первое место в мире. Эта культура имеет большое значение для нашей страны. За последние годы в России наблюдается снижение урожайности кукурузы, в том числе из-за дефицита высококачественных семян. Стимулируется репродукция многих опасных вредителей и возбудителей грибных, бактериальных