

Kolgunova Olesya Vladimirovna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: lena.alekseenko@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

Чистяков Александр Евгеньевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Chistyakov Alexander Evgenievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: cheese_05@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

УДК 519.8:532

Б.В. Сидоренко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ
НА ОСНОВЕ SRT LATTICE BOLTZMANN МЕТОДА**

В данной работе рассматриваются SRT Lattice Boltzmann модели в вычислительной гидродинамике. С их помощью проводятся численные эксперименты для реальных водоемов. При численном моделировании была задействована D3Q19 модель, которая была модифицирована для некубических сеток, при наличии преобладания шага по одному пространственному направлению. SRT-модели показали свою экономичность вычислений, легкость в использовании при численных расчетах.

Решеточное уравнение Больцмана; решеточный метод Больцмана; одиночная релаксационная модель; многовременная релаксационная модель; граничные условия отскока.

B.V. Sidorenko

**MODELING OF FLUID DYNAMICS FOR SHALLOW WATER BASINS BASED
ON SRT LATTICE BOLTZMANN METHOD**

In the work SRT Lattice Boltzmann model in CFD are considered. With their help numerical experiments for real basins are made. At numerical modeling used D3Q19 model which has been modified for not cubic grids, that is with prevalence of one of step in space. SRT models have shown high speed of calculations and simplicity of using in numerical computations.

LBE; LBM; LB-BGK; Lattice Boltzmann; MRT; Bounce Back BC.

В настоящее время все больше внимания в вычислительной гидродинамике привлекают методы, основанные на Lattice Boltzmann(LB) уравнении, которые были

развиты совсем недавно (90-е годы XX в.) [1-2]. Они применяются к разнообразным областям механики сплошной среды, таким как: гидродинамика водных бассейнов, в областях с динамической геометрией (кровоток), турбулентность, магнито-гидродинамика, распространение волн, глобальная циркуляция океана и т.д.

Непрерывное уравнение Больцмана – интегро-дифференциальное уравнение, которое описывает эволюцию одночастичной функции распределения $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ в пространстве импульса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\xi} f = Q(f, f). \quad (1)$$

Интеграл столкновения:

$$Q(f, f) = \int d^3 \xi_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\xi - \xi_1| [f(\xi') f(\xi'_1) - f(\xi) f(\xi_1)], \quad (2)$$

где $\sigma(\Omega)$ – поперечное сечение столкновения двух частиц, который преобразовывают скорости из $\{\xi, \xi_1\}$ (до столкновения) в $\{\xi', \xi'_1\}$ (после столкновения). Положение в физическом пространстве обозначено \mathbf{x} и скорость в пространстве импульса (или скорость) обозначена ξ . $f(\mathbf{x}, \xi, t) d^3 x d^3 \xi$ представляет вероятность нахождения частицы в объеме $d^3 x$ вокруг \mathbf{x} и со скоростью между ξ и $\xi + d\xi$, \mathbf{a} – сила на единицу массы, действующая на частицу. Стоит отметить, что далее в данной работе влияние внешних сил не учитывается.

Одна из главных трудностей, имея дело с уравнением Больцмана, – сложная природа интеграла столкновения. Поэтому важное упрощение интеграла столкновения было предложено Бхатнагаром, Гроссом и Круком в 1954 г. [3] и известно как приближение БГК. Уравнение Больцмана – БГК тогда принимает форму:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{(0)}], \quad (3)$$

где ξ – скорость частицы, $f^{(0)}$ – функция распределения равновесия (функция Максвелла – Больцмана), λ – время релаксации.

Для нахождения f в численном виде, для уравнения (3), во-первых, производится дискретизация в пространстве импульса, используя конечный набор скоростей $\{\xi_{\alpha}\}$, не нарушая законы сохранения в вышеупомянутом уравнении

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \xi_{\alpha} \cdot \nabla f_{\alpha} = -\frac{1}{\lambda} [f_{\alpha} - f_{\alpha}^{(eq)}], \quad (4)$$

где $f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \equiv f(\mathbf{x}, \xi_{\alpha}, t)$ и $f_{\alpha}^{(eq)}(\mathbf{x}, t) \equiv f^{(0)}(\mathbf{x}, \xi_{\alpha}, t)$ – функция распределения и функция распределения равновесия в направлении α дискретной скорости ξ_{α} , соответственно.

Для того чтобы моделировать трехмерные потоки, есть несколько трехмерных моделей решетки с набором в 15, 19 и 27 скоростей – D3Q15, D3Q19 и D3Q27 соответственно. На рис. 1 представлены некоторые из них.

Распределения равновесия для всех D3Q15, D3Q19 и моделей D3Q27 могут быть вычислены по следующей формуле:

$$f_{\alpha}^{(eq)} = \rho w_{\alpha} \left[1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right], \quad (5)$$

где w_{α} – весовой фактор, величины скоростей c_x, c_y, c_z компонент скорости частицы \vec{e}_{α} определяются так: $c_x = \delta_x / \delta_t, c_y = \delta_y / \delta_t$ и $c_z = \delta_z / \delta_t$, где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – сеточные шаги по пространству, а δ_t – шаг по времени.

В численном моделировании используется модель D3Q19, которая показала лучшую производительность, чем другие модели (D3Q15, D3Q27) [4] трехмерных вычислений течений. Весовые коэффициенты и дискретный набор скоростей для этой модели дается ниже. Для D3Q19:

$$\vec{e}_{\alpha} = \begin{cases} (0, 0, 0) & \alpha = 0 \\ (\pm c_x, 0, 0), (0, \pm c_y, 0), (0, 0, \pm c_z) & \alpha = 1, \dots, 6 \\ (\pm c_x, \pm c_y, 0), (\pm c_x, 0, \pm c_z), (0, \pm c_y, \pm c_z) & \alpha = 7, \dots, 18, \end{cases}$$

$$w_{\alpha} = \begin{cases} 1/3, & \alpha = 0 \\ 1/18, & \alpha = 1, 2, \dots, 6 \\ 1/36, & \alpha = 7, 8, \dots, 18. \end{cases}$$

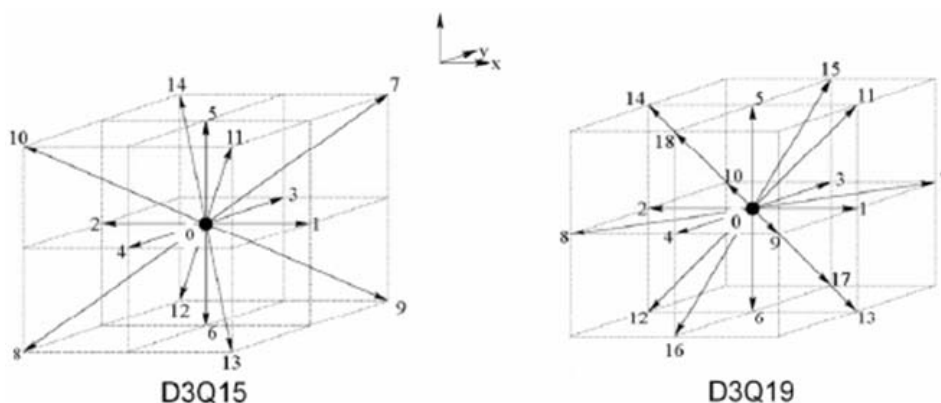


Рис. 1. Дискретные наборы скоростей для некоторых, обычно используемых, трехмерных моделей

После дискретизации в пространстве импульса, локальная плотность ρ и локальная плотность импульса $\rho \mathbf{u}$ могут быть вычислены следующим образом:

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^N f_{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^N f_{\alpha}^{(eq)}, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha=0}^N f_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^N f_{\alpha}^{(eq)} \mathbf{e}_{\alpha}.$$

Скорость звука и в моделях D3Q15, D3Q19 и D3Q27 – $c_s = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} / 3$, из уравнения состояния давления рассчитывается таким образом: $p = \rho c_s^2$.

Уравнение (4) может быть далее дискретизировано в физическом пространстве \mathbf{x} и времени t . Полностью дискретная форма уравнения (4):

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{(eq)}(\mathbf{x}, t)], \quad (6)$$

где $\tau = \lambda / \delta t$ – безразмерное время релаксации. Вышеупомянутое уравнение – дискретное LB-уравнение с приближением БГК и известно как модель LB-БГК. Так как только одно время релаксации используется в модели, эта модель с единственным временем релаксации (SRT). Есть также многорелаксационные временные (MRT) модели, используемые в литературе [5]. Уравнение (6) часто решается в следующих двух шагах

Шаг столкновений (Collision step):

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{(eq)}(\mathbf{x}, t)], \quad (7)$$

Шаг перемещений (Streaming step):

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (8)$$

где f_α и \tilde{f}_α обозначают пред- и постстолкновительное состояние функции распределения соответственно. Из уравнения (7) мы можем видеть, что шаг столкновения является просто локальным, а шаг перемещения (8) – равномерным смещением данных и требует небольших вычислительных затрат. Уравнение (7) явное и легко осуществимое для параллельного вычисления.

Вязкость, соответствующая макроскопическим уравнениям Навье – Стокса (N-S), можно получить для данного подхода в моделировании динамики сплошной среды из уравнения (9) следующим образом:

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) c_s^2 \delta t. \quad (9)$$

Этот выбор вязкости делает схему LB-БГК со вторым порядком точности в решении несжимаемых течений. Согласно уравнению (9), положительность вязкости требует, чтобы $\tau > 1/2$.

На границе часто задают условия отскока (Bounce Back boundary condition) [5,6] для частичной функции распределения (ч.ф.р.). Если профиль скорости известен во входном отверстии, стандартная схема отскока (BB BC) для неизвестной ч.ф.р. во входном отверстии имеет вид (см. рис. 2):

$$\tilde{f}_{\bar{\alpha}}^{\text{inlet}} = \tilde{f}_\alpha + 2W_\alpha \rho_{\text{internal}} \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{u}_{\text{inlet}}, \quad (10)$$

где W_α – весовой коэффициент, \mathbf{e}_α и $\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$ обозначают направления друг напротив друга: $\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$.

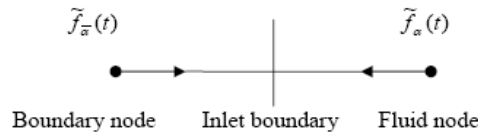


Рис. 2. Расположение границы входного отверстия

Численные результаты применения SRT-LBM к моделированию гидродинамики мелководного водоема «Etang de Berre»

В данной работе рассматривается решение гидродинамической задачи, а именно расчет параметров течения водной среды в определенные моменты времени в лагуне «Etang de Berre», находящейся на юге Франции, с заданными начальными и граничными условиями. Таким образом, в трехмерной области определения задачи $G = \{(x, y, z) : H(x, y) \leq z \leq 0\}$ – мелководном водоеме «Etang de Berre» (рис. 3-5), требуется найти компоненты скорости течения: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$; давление водной среды – $P = P(x, y, z, t)$, где $H(x, y)$ – известная функция рельефа дна (рис. 5).



Рис. 3. Снимок «Etang de Berre»

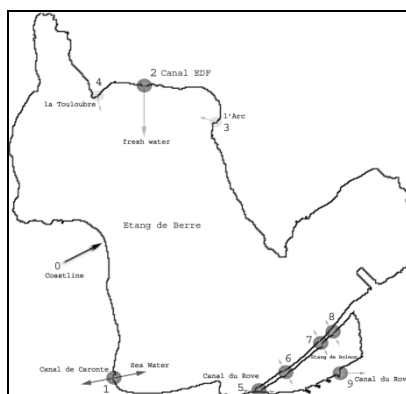


Рис. 4. Область решения задачи с г.у

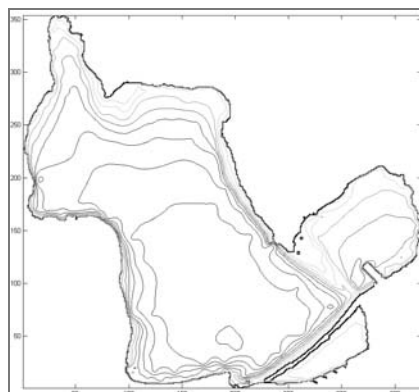


Рис. 5. Изолинии глубин

На твердой части границы условия прилипания $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$, на жидкой части границы и в источниках (в устьях рек) $\bar{\mathbf{u}}_n = \text{const}$ задаются известные потоки жидкости $\bar{\mathbf{u}}_n = \text{const}$, на свободной поверхности $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}$. На рис. 4. обозначены окрестности характерных граничных условий:

1-2) $\vec{u}_n = \vec{u}(z)$, ($|\vec{u}_n| \approx 1 \text{ m/s}$) – в общем случае функция от z (направленные скорости может еще зависеть от того, прилив или отлив в данный период времени для 1);

5-8) $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, где \mathbf{n} – нормаль к боковой стенке «Etang de Berge».

На рис. 6-8 представлены результаты численного эксперимента с помощью SRT LB-метода на расчетной трехмерной сетке для следующего набора параметров: размерность сетки, состоящей из прямоугольных параллелепипедов (94x89x40); пространственные шаги сетки ($\delta_x = \delta_y = 200 \text{ м}$, $\delta_z = 0,25 \text{ м}$); число $Re = 1000$. Результатом работы программы является векторное поле скоростей и скалярное поле для давления.

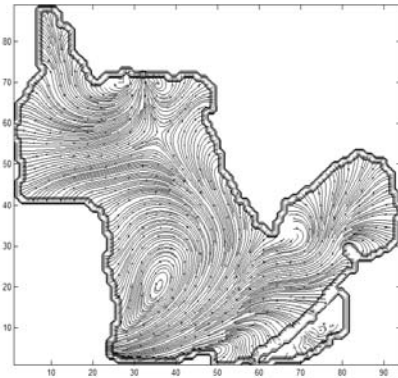


Рис. 6. Линии тока на глубине 1 м

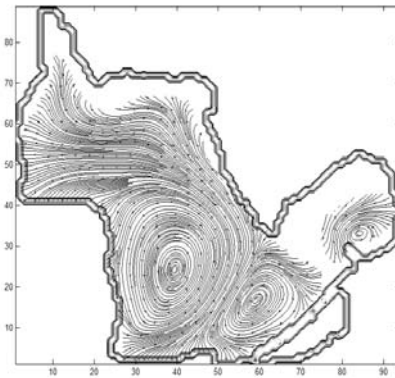


Рис. 7. Линии тока на глубине 3,5 м

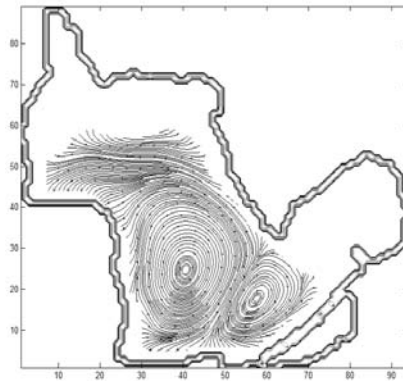


Рис. 8. Линии тока на глубине 6 м

Заключение

Практика применения SRT Lattice Boltzmann метода к прикладным задачам расчета течений морской среды в реальных мелководных водоемах показала, что он является очень удобным в использовании, легко осуществимым и не требует больших вычислительных затрат, из-за явности вычислительного алгоритма.

В отличие от классических подходов, основанных на уравнениях Навье – Стокса, которые, как правило, требуют итерационных процедур.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *S. Chen and G. Doolen, Ann. Rev. Fluid Mech.* 8, 2527 (1998).
2. *S. Succi, The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond* (Clarendon Press, Oxford, 2001).
3. *Bhatnagar P.L., Gross E.P. and Krook M., A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component system, Phys. Rev., 94, 1954. – P. 511-525.*
4. *D. Kandhai, A. Koponen, A. Hoekstra, M. Kataja, J. Timonen, and P.M.A. Sloot, Implementation aspects of 3D lattice-BGK: boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method, J. Comput. Phys., 150, 1999. – P. 482-501.*
5. *D. d’Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo, Multi-relaxation time lattice Boltzmann models in three dimensions, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 360, 2002. – P. 437-451.*
6. *S. Chen, D. Martínez, and R. Mei, On boundary conditions in lattice Boltzmann method, Phys. Fluids 8, 1996. – P. 2527-2536.*
7. *Q. Zou and X. He, On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, Phys. Fluids 9, 1997. – P. 1591-1598.*

Сидоренко Борис Владимирович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sidorenkov@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-606.

Кафедра высшей математики; аспирант и ассистент.

Sidorenko Boris Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sidorenkov@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-606.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student and assistant.

УДК 518.5.001.57

Т.В. Камышникова

ВЫВОД ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

Изучение гидрохимических характеристик вод мелководного водоема является весьма актуальным, так как их изменчивость, как правило, является отражением возможных отклонений в функционировании водоема. И здесь математическое моделирование может оказать неоценимую помощь.

Модель «мелкой воды»; адвективно-диффузионное уравнение.