

## Раздел VI. Применение высокопроизводительных алгоритмов в математическом моделировании

УДК 514.83

А.И. Сухинов, С.А. Бутенков, А.Л. Жуков

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА КЛАСТЕРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ГРАНУЛИРОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

*В статье рассматривается новый подход к построению математической модели снежного покрова (СП), позволяющей оценить его важнейшие параметры – плотность, проницаемость, прочность и т.д. С новой точки СП является дважды пористой структурой. Во-первых, составляющие его твердые осадки (снежинки) образуются в условиях значительной термодинамической неравновесности путем агрегации молекул воды из переохлажденного пара на микроскопических зародышах, что приводит к значительному разнообразию и усложнению из геометрических форм, представляющих собой фрактальные кластеры типа дендритов. Во-вторых, плотность упаковки твердых осадков внутри СП существенно зависит как от начальных условий его формирования (температура, ветер и т.д.), так и от дальнейшего метаморфизма снежинок в условиях просачивания водяного пара сквозь толщу СП. Плотность упаковки снежинок в составе СП может меняться в широких пределах. В работе предлагается использование упрощенных моделей СП, основанных на использовании принципов информационной грануляции, что позволяет получить эффективные кластерные вычислительные алгоритмы оценивания и прогнозирования параметров СП.*

*Снег; степенные законы; фрактальные кластеры; упаковка и размещение; информационные гранулы.*

A.I. Sukhinov, S.A. Butenkov, A.L. Zhukov

### BLANKET OF SNOW STATE PHYSICAL MODEL FOR CLUSTERING CALCULATIONS BASED ON INFORMATION GRANULATION

*Presented paper deals with the new approach to a Blanket of Snow state modeling. There are the approaches to the main parameters of the Blanket of Snow estimations, based on double-cellular model of snow structure. At first, all Snow Flakes are the examples of fractal clustering of water vapor molecules. At second, all Snow Flakes are the elements of space package, presented as the sphere package for example. All changes of the Blanket of Snow may be estimated by using of power-behaved models fractal structures. The generalized models of Snow Flakes packing are used especially for cluster calculations.*

*Snow flakes; blanket of snow; power-behaved models; fractal clusters; placement and packaging; information granulation.*

#### Введение

Изучение, моделирование и предсказание состояния СП имеет большое народно-хозяйственное значение в географических условиях нашей страны и ряда других северных стран [1]. Структура и числовые характеристики СП весьма чувствительны как к начальным условиям его образования [2], так и к изменению

свойств окружающей среды в процессе метаморфизации первичных форм твердых осадков, входящих в СП [3]. Большинство работ по структурным изменениям СП и прогнозированию связанных с ним явлений (лавин и т.д.) носят качественный характер ввиду сложности количественного описания физических процессов в СП [2]. Эта сложность связана с тем, что СП представляет собой вещество, отличающееся от классических состояний жидких и твердых тел. В данной работе предлагается математическая модель формирования и метаморфизации СП, основанная на представлении СП в виде дважды пористой фрактальной структуры [4] и дальнейшем применении к ней теории информационной грануляции (ТИГ) [5-7]. С позиций ТИГ в качестве ключевого параметра, определяющего важнейшие свойства СП, используется размерность фрактальных кластеров [8], а также основные свойства структур упаковки [9,10].

В последнее время внимание физиков привлекают математические модели состояний вещества, в отличие от однородных (жидкость, твердое тело), имеющих сложную пористую структуру [4]. Основными элементами таких тел являются фрактальные агрегаты, или фрактальные кластеры (ФК) [4], представляющие собой системы связанных частиц малых размеров с корреляционной функцией [8]:

$$C(r) = \frac{\langle \rho(r_0) \rho(r_0 - r) \rangle}{\langle \rho(r_0) \rangle}, \quad (1)$$

где  $\rho(r)$  – плотность частиц в данной точке, символ  $\langle \cdot \rangle$  означает усреднение по положениям частиц [8]. Фрактальность свойств ФК заключается в том, что если выбрать одну из связанных частиц в качестве центра сферы, радиус которой  $r$  существенно превышает размер отдельной частицы, то по (1) средняя плотность вещества ФК в сфере радиуса  $r$  изменяется по степенному закону [11]:

$$\rho_s(r) = \rho_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{D_E - D_F}, \quad (2)$$

где параметр  $D_F$  носит название *фрактальной размерности* ФК, а  $D_E$  – евклидова размерность объемлющего пространства. При  $D_F < D_E$  плотность вещества убывает с ростом радиуса ФК  $r$  и по (2) можно оценить предельный радиус ФК  $R$  в виде [8]:

$$R \propto r_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{D_E - D_F}}. \quad (3)$$

С ростом радиуса  $R$  ФК плотность вещества в нем падает согласно (1) и соответственно уменьшается его прочность. Поэтому размеры ФК ограничены в зависимости от параметров (3). Макроскопический объект не может быть фрактальным кластером, однако он может состоять из фрактальных кластеров [4]. Именно таким объектом является снежный покров. Отметим, что при  $D_F = D_E$  приведенные оценки справедливы для нефрактальных тел [4]. Переход от непосредственного геометрического описания к упрощенному на основе (1–3) представляет собой процесс, известный из работ L. Zadeh и его последователей как *грануляция информации* (упрощение сложных моделей) [5–7]. Подобные модели позволяют получить приемлемые с точки зрения вычислительной эффективности алгоритмы расчета основных показателей ФК и состоящего из них СП, в отличие от классических

не гранулированных моделей [12], которые не могут дать приемлемые оценки в силу степенного характера фрактальных законов (1–3) [12].

Работа организована следующим образом: в разделе 1 вводится классификация твердых осадков в виде ФК специальной структуры, в разд. 2 описывается физика метаморфизма СП, в разд. 3 вводятся основные понятия теории грануляции применительно к ФК, в разд. 4 вводятся оценки параметров СП на основе упаковок пространственных гранул, содержащих ФК.

### 1. Классификация и типизация первичных твердых осадков

С точки зрения математического представления, первичные твердые осадки (снежинки) представляют собой естественные ФК, образующиеся в специфических для атмосферы условиях агрегации переохлажденного водяного пара на поверхности первичных зерен (зародышей) [1]. В ряде работ показано, что в силу преобладания в составе атмосферной воды фазы льда  $II$ , образующей призматически-гексагональную кристаллическую решетку [8], все первичные кристаллы снега имеют гексагональную симметрию (рис. 1).

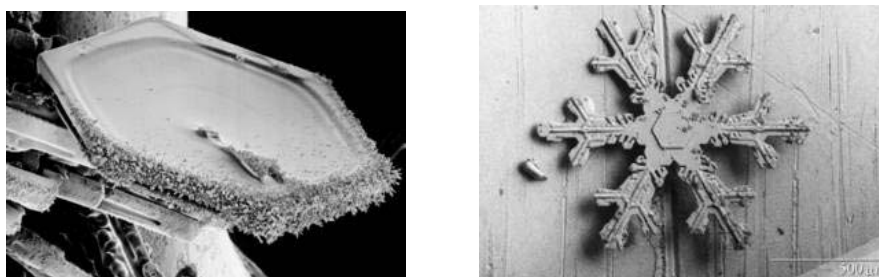


Рис. 1. Дендритный снежный кристалл. В центре снежного кристалла видно шестиугольник из которого он вырос по [11]

В процессе формирования снежинки из гексагонального зародыша она проходит несколько стадий, после которых становится возможным транзит снежинки на поверхность снежного покрова и ее укладка в составе других снежинок [2]. От конкретных условий, связанных с температурой, влажностью воздуха и скоростью ветра в области формирования зависит морфология снежинки, выходящей из фазы транзита [3]. При перемещении исходных кристаллов происходит сублимация водяного пара на поверхности снежинки, законы которой обусловлены ее первичной симметрией. Диаграмма типизации снежных ФК в зависимости от внешних условий по [8] приведена на рис. 2.

В местах, где кристаллическая решетка имеет дефекты (углы первичного шестиугольного зерна), имеется большее количество свободных водородных связей, в результате чего, вероятность агрегации молекулы водяного пара там выше [2]. Именно по этой причине образующаяся в результате структура является фрактальным кластером.

Принятая в нашей стране стандартная классификация твердых осадков по их форме [2] приведена на рис. 3. Первый столбец показывает применяемые графические обозначения, а строки отражают возможные формы снежинок, прошедших транзит в различных условиях: F1 – пластинки; F2 – звездочки; F3 – столбики; F4 – иголки; F5 – пространственные звездочки; F6 – столбики с пластинками; F7 – кристаллы неопределенной формы; F8 – снежная крупа; F9 – ледяные зерна; F0 – град.

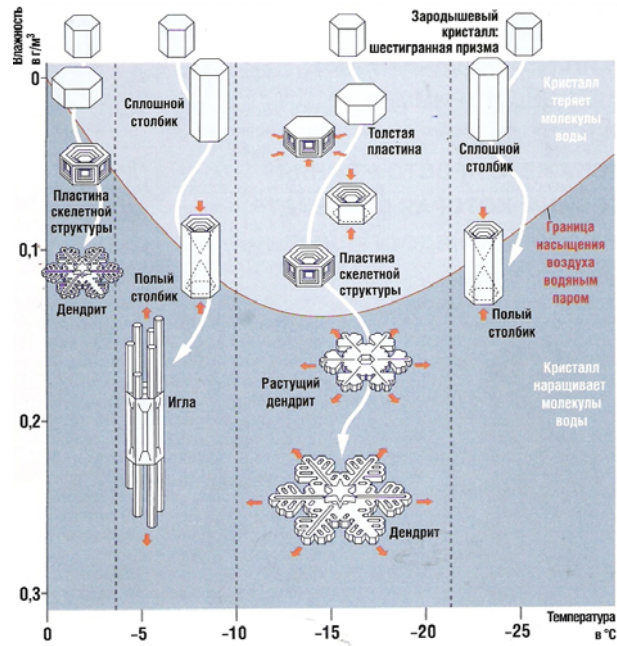


Рис. 2. Диаграмма влияния фазовых состояний водяного пара на формирование геометрии снежинок по [8]

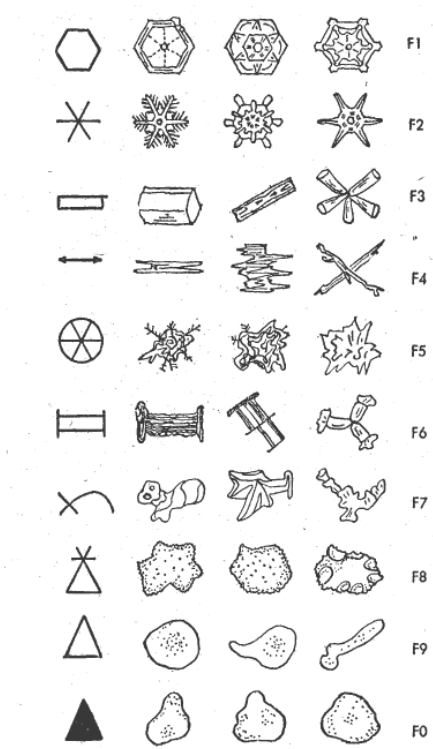


Рис. 3. Условные обозначения и примерная структура фрактальных кластеров свежеснежавшего снега

Отметим, что попытки классификации по форме являются весьма приближенными. Практически, при некотором внешнем сходстве формы, не существует двух одинаковых снежинок в составе свежеснежного покрова. При переносе дендритов ветром чаще всего происходит их дефрагментация на обломки сложной формы [1]. Эти обстоятельства значительно затрудняют попытки использовать классическую геометрию для оценки свойств снежинок [13]. В связи с этим в настоящей работе предлагается классифицировать первичные снежные кристаллы по их фрактальной размерности [4].

## 2. Метаморфизм снежного покрова

Сезонный метаморфизм снега в составе СП происходит в результате баланса процессов *сублимации* и *переноса*. Сублимация – процесс превращения льда в водяные пары без перехода в жидкое состояние и наоборот [4]. При метаморфизме в СП, лед снежинок превращается в водяные пары, которые переносятся в другие слои [3]. Пары переносятся против температурного градиента. Это происходит из-за того, что снежный покров обычно имеет отрицательный градиент температуры в направлении от земли к поверхности. Лед сублимируется из нижних, более теплых слоев и переносится в виде льдинок в верхние слои [1] как показано на рис. 4,а.



Рис. 4. Изменение свойств ФК снега под действием сублимации (а), спекания (b), округления (с)

Изменения, происходящие в слоях СП, когда он становится влажным (температура поднимается до  $0^{\circ}\text{C}$ ), и повторно замерзает, известны как метаморфизм под воздействием таяния и заморозки. Этот процесс обычно происходит поздней зимой и весной когда температура воздуха высокая, высокая солнечная радиация и циклы таяния и повторной заморозки обычное явление. Процессы метаморфизма в этих условиях определяются *спеканием* и *округлением* [3] (рис. 4,б и 4,с).

Спекание обычно связано с процессом округления. Пары влаги оседают в точках соединения зерен снега и образуют шейки. Эти шейки создают сильные связи между зернами, увеличивая прочность снега [1]. В процессе округления образуются круглые зерна. Такие зерна хорошо прилегают друг к другу и образуют укрепляющийся слой снега. Округление происходит при следующих условиях: малый температурный градиент, в результате чего водяной пар медленно переносится из теплых областей в холодные, высокая плотность снега, малый размер снежных зерен [3].

В результате проведенного анализа процессов, происходящих в СП от его формирования до таяния (или превращения в лед), установлено, что плотность и проницаемость ФК снежного покрова играют определяющую роль в его метаморфизме и могут оцениваться с помощью рабочих соотношений (1–3), полученных для ФК. При этом можно не рассматривать геометрию каждого отдельно взятого ФК, считая, что он представлен сферической ячейкой с плотностью (2) и характерным размером (3). К этим ячейкам применим основные результаты, полученные

для представления объектов покрытием криволинейными гранулами (в данном случае – сферами) [6,7].

### 3. Инкапсулирующие гранулы в ТИГ

Фундаментальным понятием ТИГ [5,14] является понятие инкапсулирующей гранулы. Для случая двух переменных, определив на плоскости проекции произвольной гранулы  $g$ , обозначаемые как  $pr_x g$  и  $pr_y g$ , можно определить *инкапсулирующую декартову гранулу* для произвольной гранулы  $g$  как  $G_+ = pr_x g \times pr_y g$ . Гранула  $G_+$  является точной верхней гранью конечного множества всех гранул, содержащих  $g$ . С понятием инкапсулирующей гранулы тесно связано фундаментальное понятие аппроксимирующего графика отношения. График подмножества плоского множества задается как

$$f^* = A_1^x \times A_1^y + \dots + A_n^x \times A_n^y = \sum_i A_i^x \times A_i^y, \quad i = 1, \dots, n,$$

где операция "+" означает дизъюнкцию в широком смысле слова. Отметим, что в настоящей работе речь идет о декартовых координатах [14] (в отличие от лингвистических переменных [5]).

В ряде наших работ была использована алгебраическая модель гранул в декартовых координатах, которые Ф. Klein назвал «грассмановыми элементами» [6]:

$$g(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вся геометрическая информация о декартовой грануле содержится в компактном представлении (4). Алгебраические модели могут быть разработаны для пространства любой размерности [14]. На рис. 6 изображен выпуклый базовый элемент (гранула) в сферической системе координат.

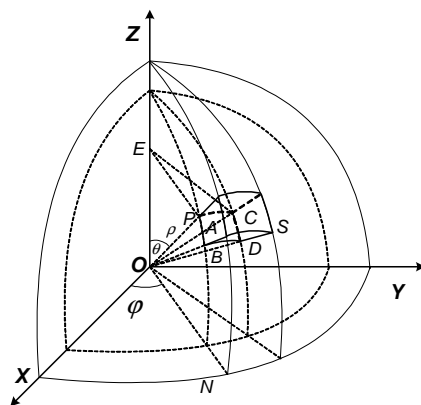


Рис. 5. Элемент пространственной трехмерной гранулы в сферической системе координат

Используя (4), мы можем по [14] получить уравнение базового элемента в сферической системе координат, заданного предельными значениями полярных радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , полярных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$g^s(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \rho_2^2 & \rho_2^2 & \rho_1^2 & 0 \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ \varphi_1 \rho_1 & \varphi_1 \rho_1 & \varphi_1 \rho_2 & 1 \\ \varphi_2 \rho_1 & \varphi_2 \rho_1 & \varphi_2 \rho_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Модель (5) может использоваться для нахождения отдельных геометрических характеристик криволинейной гранулы путем вычисления определителей ее различных миноров. Для случая инкапсуляции двух произвольных непересекающихся грасмановских гранул в конических координатах  $g^i$  и  $g^j$  (5) можно записать уравнение инкапсулирующей гранулы  $G_+$  полученное из (4) и (5), в виде

$$G_+^s(g^i, g^j) = \begin{pmatrix} \min(\rho_2^i, \rho_2^j) & \max(\rho_2^i, \rho_2^j) & \min(\rho_1^i, \rho_1^j) & 0 \\ \max(\cos(\theta_1^i), \cos(\theta_2^i)) & \min(\cos(\theta_2^i), \cos(\theta_2^j)) & 0 & 0 \\ \min(\varphi_1^i, \varphi_1^j) \min(\rho_1^i, \rho_1^j) & \min(\varphi_1^i, \varphi_1^j) \min(\rho_1^i, \rho_1^j) & \min(\varphi_1^i, \varphi_1^j) \max(\rho_2^i, \rho_2^j) & 1 \\ \max(\varphi_2^i, \varphi_2^j) \min(\rho_1^i, \rho_1^j) & \max(\varphi_2^i, \varphi_2^j) \min(\rho_1^i, \rho_1^j) & \max(\varphi_2^i, \varphi_2^j) \max(\rho_2^i, \rho_2^j) & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Введенные модели (5,6) для инкапсулирующих гранул в сферической СК позволяют находить параметры нечетких геометрических моделей ортогональных гранул, покрывающих множества точек, принадлежащих гранулам снежного покрова.

#### 4. Оценивание параметров фрактальной модели снежного покрова

С точки зрения фрактальной модели СП каждую снежинку следует рассматривать как сферу, внутренность которой заполнена фрактальным кластером из числа представленных на рис. 3. С геометрической точки зрения фрактальная размерность кластера  $D_F$  не зависит ни от его формы, ни от типа упаковки в нем частиц. Она лишь служит количественной характеристикой того, как кластер заполняет занимаемое им пространство [12]. Получив экспериментальную оценку размерности  $D_F$  снежинки, мы можем по (1–3) оценить плотность снежного покрова и силы, действующие внутри него. На эти факторы также оказывает существенное влияние плотность упаковки снежинок (в нашей модели – фрактальных кластеров) при образовании и метаморфизации снежного покрова [3]. Оценки размерности фракталов, рассмотренные в [11], представляют собой частные случаи обобщенной размерности Реньи [4]:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[ \ln(I_q(\varepsilon)) / \ln(1/\varepsilon) \right], \quad (7)$$

где  $I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q$  – информация Реньи порядка  $q$ .

В частности для разных значений  $q$ , мы можем получить спектр оценок:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1-0} \ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^0 \right) \right] / \ln(1/\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[ \ln(M(\varepsilon)) / \ln(1/\varepsilon) \right] = D_F, \quad (8)$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln(p_i) \right] / \ln(1/\varepsilon) = D_I, \quad (9)$$

$$\text{так как с учетом (7) } I_1(\varepsilon) = \lim_{q \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1-q} \ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right) \right] = - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln(p_i).$$

Наконец, для  $q = 2$  получаем

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1-2} \ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right) \right] / \ln(1/\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right) \right] / \ln(\varepsilon) = D_c. \quad (10)$$

Размерность  $D_q$  – монотонно убывающая функция, т.е. для любых  $q_1 < q$  выполняется неравенство  $D_{q_1} \geq D_q$ . Равенство достигается только в случае пространственно однородных кластеров. Для целых  $q$  размерность  $D_q$  имеет физический смысл. Большие положительные значения  $q$  подчеркивают области пространства, наиболее плотно занятые ФК, тогда как большие отрицательные значения подчеркивают наименее плотно занятые ФК области. Таким образом, диапазон значений размерностей  $D_q$  может рассматриваться как характеристика степени пространственной неоднородности фрактальных кластеров (снежинок).

### 5. Оценивание степени упаковки гранул снежного покрова

В рамках используемой модели допустим, что первичная упаковка сфер, содержащих фрактальные кластеры снежинок, является наименее плотной упаковкой [9]. Тогда в процессе уплотнения снежного покрова (в частности, под действием ветра) изменение структуры упаковки можно моделировать как переход к максимально плотной упаковке сфер в трехмерном пространстве [9], а промежуточные значения плотности соответствуют известным типам упаковки по [10]. В результате можно привести таблицу оценок плотности упаковки.

Таблица

**Значения градиентов плотности упаковки для модели уплотнения снежного покрова**

Вид упаковки	Плотность упаковки, $\mu$	Кол-во соприкасающихся шаров
Наиболее плотная	0,740	12
Кубическая	0,513	6
Тетраэдральная	0,340	4
Наименее плотная	0,123	4

Данные таблицы совместно с оценками (7–10) дают возможность калибровки модели снежного покрова в зависимости от района и условий формирования снежного покрова по экспериментальным данным измерений, приведенным в [2]. Данные о количестве соприкасающихся шаров дают возможность построения оценки силы сцепления внутри снежного покрова, которая обеспечивает удержание снежных блоков на склоне вплоть до достижения критического значения, соответствующего началу схода лавин [1].

### Заключение

Используя основные результаты теории оптимальной укладки шаров [6] и оценки размерности фрактальных кластеров (1-6), мы можем получить оценку плотности и массы для кубической единицы снежного покрова [3]. Физическая модель должна учитывать действие силы тяжести стремящие сдвинуть элемент



объема в лавину и силы сопротивления, которая удерживает объем снега на склоне в процессе уплотнения снежного [1]. Новая модель позволяет учитывать два механизма уплотнения снежного покрова: увеличение плотности укладки от случайного к оптимальному (действие ветра и т.д.); увеличение плотности или увеличение фрактальной размерности (за счет их перехода в лед). Ее особенностью является некоторая упрощенность, за счет которой удастся получить оценки для ФК (снежинок) вне зависимости от их точной геометрической формы (которая обычно бывает слишком сложной) и «прозрачность» получаемых результатов для практических целей [7].

Для реализации основных введенных расчетных соотношений оптимальным является использование кластерной вычислительной системы. Это связано с особенностью используемого алгоритма оценивания спектральных характеристик снега (7)-(10) с помощью покрытия элементарными объектами (5) и оценкой степени сходства по (6) [14]. При этом алгоритм покрытия выполняется многократно для разных значений характеристических размеров покрытий [13]. Такой алгоритм лучше всего реализуется в составе кластерной системы, каждый из кластеров которой считает оценки для отдельного размера покрытия. Это становится возможным потому, что получаемые оценки не зависят от предыдущих значений шага покрытия. Это делает предложенный алгоритм идеально подходящим для кластерной системы.

Результаты экспериментального оценивания характеристик  $D_q$  и плотности заполнения гранулы элементами ФК (снежинки) приведены на следующем рис. 6.

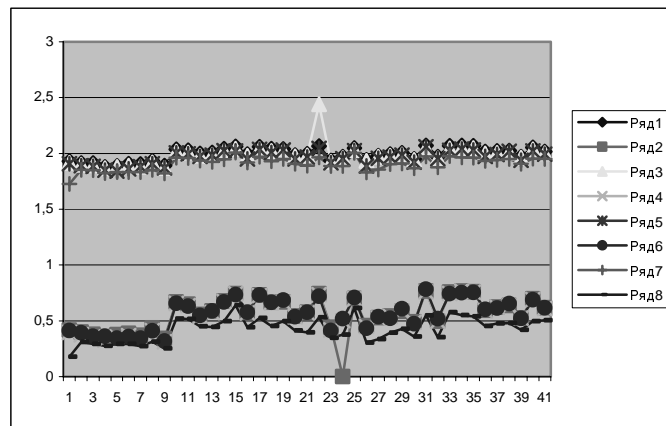


Рис. 6. Распределение оценок качества заполнения гранул пространства с помощью кластеров снежинок

Экспериментальное исследование качества классификации ФК снега по оценкам (7–10) показало, что дисперсия оценок ФК по классификации (см. рис. 3) составляет примерно 10 % от среднего значения  $D_q$ , что говорит о высокой устойчивости метода, особенно в сравнении с оценкой по среднему значению плотности. Оценка спектра параметров Реньи слабо зависит от размеров дискретной модели снежинки и указывает правильный фрактальный параметр, которым может использоваться в (1–3). Это особенно важно с учетом того факта, что значительный процент ФК изменяет свою исходную форму (рис. 2) в результате повреждений при укладке в СП. При этом попытки оценивания статистическими методами дают

неверные значения плотности укладки, радиуса кластера и других основных параметров снежного покрова. Кроме того, оценивание закона изменения элементов спектра параметров Реньи (которые, согласно материалам разд. 3, всегда возрастают при протекании метаморфических процессов) позволяет прогнозировать критические значения плотности и силы сцепления гранул, что позволяет предсказывать ситуации, опасные с точки зрения схода лавин [2].

На основе данной модели становится возможным построение более сложных моделей просачивания водяного пара и динамики движения массы лавины.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Долов М.А., Халкечев В.А. Физика снега и динамика снежных лавин. – Л.: Гидрометеоздат, 1972.
2. Лосев К.С. По следам лавин. – Л.: Гидрометеоздат, 1983.
3. Тушинский Г.К., Гуськова Е.Ф. Перекристаллизация снега и возникновение снежных лавин. – М.: Изд.-во МГУ, 1953.
4. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991.
5. Zadeh L. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. // Fuzzy Sets and Systems, vol. 90, 1997. – P. 111–127.
6. Бутенков С.А., Каркищенко А.Н., Кривша В.В. О выборе метода выделения нечетких гранул при распознавании и обработке изображений // Обзорение прикладной и промышленной математики, – М: ТВП, Т. 7, Вып. 2. 2000. – С. 359-361.
7. Бутенков С.А., Каркищенко А.Н., Итенберг И.И., Бачило С.А. Кривша В.В. Применение методов представления изображений с помощью криволинейных гранул // В сб. трудов 4-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение», – М., 2002. – С. 236-238.
8. Vicsek T. Fractal Growth Phenomena. – Singapore: World Scientific, 1987.
9. Роджерс К. Укладки и покрытия. – М.: Мир, 1968.
10. Барановский Е.П. Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967 г. – М.: ВИНТИ, 1969. – С. 189–225.
11. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
12. Демидов Е.Е., Даревская Ю.В., Моренков О.А., Товчигречко А.А. Нелинейный корреляционный анализ // Журнал «Обзорение прикладной и промышленной математики», Т. 6. Вып. 1. 1999. – С. 5-57.
13. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.
14. Butenkov S. Granular Computing in Image Processing and Understanding. // In Proc. of IASTED International Conf. on AI and Applications “AIA-2004”, Innsbruck, Austria, February 10-14, 2004.

#### **Сухинов Александр Иванович**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: rector@tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

#### **Sukhinov Alexander Ivanovich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: rector@tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.  
Phone: 8(8634) 310-599; 7(928)102-11-06.  
Chief of TIT SFedU; professor.

**Бутенков Сергей Андреевич**

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: saab@tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)371-668.

Доцент, заведующий научной лабораторией.

**Butenkov Sergey Andreevich**

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: saab@tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)371-668.

Assistant Professor, Head of Research Laboratory,

**Жуков Анзор Людинович**

НИИ прикладной механики и автоматики КБЦ РАН в г. Нальчике.

E-mail: lamark-21@yandex.ru.

Россия, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик.

Тел.: 8(8662)426-661.

Младший научный сотрудник.

**Zhukov Anzor Ludinovich**

Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkar Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Nalchik.

E-mail: lamark-21@yandex.ru.

Nalchik, Kabardino-Balkar Scientific, Russia.

Phone: 8(8662)426-661.

Equation Chapter 1 Section 1.

УДК 519.6

**А.И. Сухинов, Д.В. Лапин**

**ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДИФфуЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМАХ**

*В работе рассмотрены двумерные обратные задачи диффузии-конвекции, необходимость быстрого решения которых возникает при ретроспективном анализе техногенных катастроф. Описан способ решения обратных задач, основанный на методе квазиобращения и последующего итерационного уточнения начального условия. Приводится описание параллельных алгоритмов и теоретические оценки ускорения эффективности и масштабируемости.*

*Обратная эволюционная задача; параллельное решение; обратная задача диффузии-конвекции.*