УДК 517.524 + 519.615.4

В.Е. Долгой, В.И. Шмойлов

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. При вычислении отношений определителей Теплица используется модифицированный алгоритм Рутисхаузера. Для нахождения комплексных корней применяется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Алгебраические уравнения; нули полиномов; определители Теплица; расходящиеся непрерывные дроби; r/φ-алгоритм.

V.E. Dolgoy, V.I. Shmoilov

SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS USING CONTINUOUS FRACTIONS

There are given analytic expressions introducing all roots of arbitrary algebraic n-th equation using coefficients of initial equation. These formulas consist of two proportions of Toeplitz infinite determinants with algebraic equation coefficients as diagonal elements. Modified Rutishauser's algorithm is using for calculation Toeplitz determinants ratio. For complex roots determination is used method of divergent continued fractions summability.

Algebraic equation; zero of polynomial; Toeplitz's determinants; divergent continuous fractions; r/φ- algorithm.

Введение

Известный американский специалист Р. Хемминг в монографии “Численные методы” [1] отмечал: “Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным известным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного". В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [2].

Предлагаемый метод решения алгебраических уравнений использует формулы Эйткена и модифицированный QD-алгоритм Рутизхаузера, который позволяет эффективно вычислять значения отношений определителей Теплица высоких порядков. Для определения комплексных корней применяется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей.

1. Постановка задачи

Пусть имеется полином степени n:

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} x + \alpha_n . \qquad (1.1)$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n}=1+c_1 x+c_2 x^2+\ldots+c_m x^m+\ldots. \qquad (1.2)$$

Коэффициенты α_i в (1.1) и (1.2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (1.2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m=-\left(\alpha_1 c_{m-1}+\alpha_2 c_{m-2}+\ldots+\alpha_n c_{m-n}\right), \quad c_0=1,\ c_1=-\alpha_1.$$

Для определения корней алгебраического уравнения

$$x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=0 \qquad (1.3)$$

Эйткен предложил формулы [3]:

$$x_1=\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+1}}{c_m}, \qquad (1.4)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2}\end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m}\right)=\frac{x_1 x_2}{x_1}=x_2, \qquad (1.5)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4}\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2}\end{vmatrix}}\right)=\frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2}=x_3, \qquad (1.6)$$

$$x_n=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_n^{(m+1)}}{H_n^{(m)}} : \frac{H_{n-1}^{(m+1)}}{H_{n-1}^{(m)}}\right),$$

где

$$H_n^{(m)}=\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \ldots & c_{m+n-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+n} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \ldots & c_{m+2n-2}\end{vmatrix}, \ H_0^{(m)}=1,$$

то есть

$$x_n = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+n+1} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+n} & c_{m+n+1} & \dots & c_{m+2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m} & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \dots & c_{m+2n-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+n} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \dots & c_{m+2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m} & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n-1} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+n-2} & c_{m+n-1} & \dots & c_{m+2n-4} \end{vmatrix}} \right). \quad (1.7)$$

Здесь $|x_1| \ge |x_2| \ge |x_3| \ge \ldots \ge |x_n|$.

Очевидно, что используя формулы Эйткена можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1.3). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (1.3), описываемый формулой (1.4), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Применим описанный в [4] r/φ-алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей к определению комплексных корней алгебраического уравнения (1.3).

2. Представление нулей полинома

Запишем формулы Эйткена (1.4-1.7) в развернутом виде. В результате несложных преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэфициенты исходного уравнения (1.3).

Формулу (1.4) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \quad (2.1)$$

Последующие корни уравнения (1.3) запишутся следующим образом:

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \quad (2.2)$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \quad (2.3)$$

………………………………………………………………....

$$x_i = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \quad (2.4)$$

Отношения определителей (2.1–2.4), выражающие корни алгебраического уравнения (1.3) через его коэффициенты, будем называть функциями $X_i^{(n)}$. Для функций $X_i^{(n)}$ введём обозначение

$$X_i^{(n)} = X_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n).$$

Известно, что попытки найти решения алгебраических уравнений степеней выше четвёртой в радикалах стимулировалось тем обстоятельством, что для уравнений 2, 3 и 4 степени решения в радикалах были найдены. Метод аналогии при решении уравнений в радикалах не сработал. И здесь уместно подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвёртой функции $X_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Если все корни уравнения n-й степени действительны, то значения этих корней со все большей точностью можно установить непосредственно, вычисляя последовательно значения определителей, входящих в формулы (2.1–2.4). Функции $X_i^{(n)}$, определяемые выражениями (2.1–2.4), будем называть непрерывными дробями класса $X_i^{(n)}$. Определение математических конструкций (2.1–2.4), как непрерывных дробей особой структуры, позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие, как подходящая дробь, что значительно упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $X_i^{(n)}$ и r/φ-алгоритма.

Для комплексных корней уравнения (1.3), определяемых также формулами (2.1–2.4), непосредственное вычисление их значений невозможно. В самом деле, при действительных значениях коэффициентов α_i алгебраического уравнения (1.3) значения определителей, входящих в формулы (2.1–2.4), не могут быть комплексными. Далее будут рассмотрены примеры решения алгебраического уравнения, которые имеют комплексные корни. В этом случае необходимо дополнительно использовать r/φ-алгоритм.

Модуль и аргумент искомого комплексного числа для непрерывных дробей класса $X_i^{(n)}$ определяются формулами:

$$r_0 = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{p} \left| X_{ip}^{(n)} \right|}, \tag{2.11}$$

$$|\varphi_0| = \pi \lim_{p\to\infty} \frac{k_p}{p}, \tag{2.12}$$

где $X_{ip}^{(n)}$ – p-я подходящая дробь выражений (2.1–2.4),

k_p – число отрицательных подходящих дробей из p подходящих дробей.

Например, подходящие дроби $X_{2p}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ определяются следующим образом:

$$X_{21}^{(n)} = \frac{\left|-\alpha_2\right|}{1} : \frac{\left|-\alpha_1\right|}{1}, \qquad X_{22}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\left|-\alpha_2\right|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\left|-\alpha_1\right|},$$

$$X_{23}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_4 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \qquad \ldots \quad .$$

3. Решение алгебраических уравнений с использованием *r/φ*-алгоритма

Для определения подходящих непрерывных дробей, записываемых отношениями определителей Теплица, то есть определителей не общего, а весьма специального вида, может быть эффективно использован после незначительной модификации, известный рекуррентный алгоритм частных и разностей, или QD-алгоритм Рутисхаузера. Так называемая упрощённая форма *QD*-алгоритма описывается формулами [5]:

$$e_n^{(m)} = e_{n-1}^{(m+1)} + x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}, \tag{3.1}$$

$$x_{n+1}^{(m)} = x_n^{(m+1)} \cdot \frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}. \tag{3.2}$$

QD-алгоритм, определяемый формулами (3.1) и (3.2), удобно представлять следующей схемой (рис. 1):

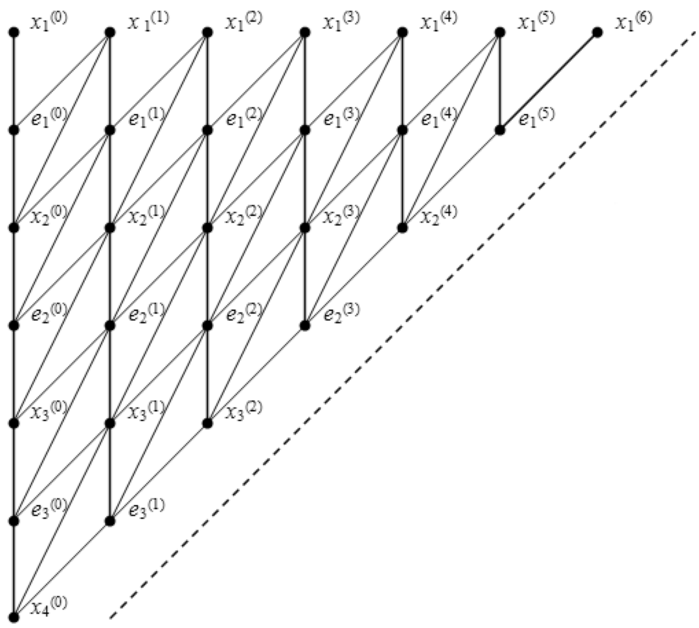

Рис. 1. Граф QD-алгоритма Рутисхаузера

Полагаем, что $e_0^m = 0$. Элементы первой строки $x_1^{(m)}$ составляют последовательные подходящие дроби Хессенбнрга (2.1). Значение непрерывной дроби Хессенбнрга (2.1) удобнее вычислять не с использованием линейных рекуррентных соотношений, что приводит к быстрому переполнению разрядной сетки или возникновению “машинного нуля”, а представляя дробь Хессенбнрга (2.1) восходящей дробью.

$$x_1^m = (-\alpha_1) + \cfrac{(-\alpha_2) + \cfrac{(-\alpha_3) + \cfrac{\vdots \, + \cfrac{(-\alpha_n)}{x_1^{(m-n+1)}}}{x_1^{(m-3)}}}{x_1^{(m-2)}}}{x_1^{(m-1)}}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Восходящую непрерывную дробь (3.3) запишем в эквивалентной форме:

$$x_1^{(m)} = (-\alpha_1) + \frac{(-\alpha_2)}{x_1^{(m-1)}} + \frac{(-\alpha_3)}{x_1^{(m-2)} x_1^{(m-1)}} + \ldots + \frac{(-\alpha_n)}{x_1^{(m-n+1)} x_1^{(m-n)} \ldots x_1^{(m-1)}}. \tag{3.4}$$

В табл. 1 и 2 приведены результаты вычисления комплексных корней уравнения

$$x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8 + 16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0 \tag{3.5}$$

с использованием алгоритма Рутисхаузера и r/φ-алгоритма. Уравнение (3.5) имеет корни: $x_1 = 2,\ x_2 = 2e^i,\ x_3 = 2e^{-i},\ x_4 = 2$.

$x_2=2e^i$

Таблица 1

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,220924067600	1,220924067600	0,779075932405	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	1,166054792820	1,193174069730	0,806825930266		0,000000000000	1,000000000000	
2	0,457271639589	0,866683695979	1,133316304020		0,000000000000	1,000000000000	
4	2,855819728860	1,535982125620	0,464017874380	m	0,628318530718	0,371681469282	m
8	0,916218026493	1,628770046970	0,371229953025	m	0,698131700798	0,301868299202	m
16	12,196583212100	1,847890285260	0,152109714739	m	0,923997839291	0,076002160709	m
32	3,843317264310	1,929075885880	0,070924114122	m	0,951997773815	0,048002226185	m
64	2,005784174240	1,959056634960	0,040943365045	m	0,966643893412	0,033356106588	m
128	-0,129973382076	1,936094593410	0,063905406585		0,998490688350	0,001509311650	m
256	1,376378788680	1,987249193310	0,012750806689	m	0,990151770198	0,009848229802	
512	-6,402078713170	1,993746888830	0,006253111170	m	0,998205852895	0,001794147105	
1024	-4,414311948660	1,996709675280	0,003290324721	m	0,999179712264	0,000820287736	m
2048	-2,331786544940	1,998132145250	0,001867854748	m	0,999667354876	0,000332645124	m
4096	-0,629161511589	1,998651230730	0,001348769270	m	0,999911354718	0,000088645282	m
8192	0,816053931871	1,999472346970	0,000527653034	m	0,999649950923	0,000350049077	
16384	4,540491080410	1,999846182800	0,000153817198	m	0,999902696886	0,000097303114	
32768	2,052437009810	1,999916316970	0,000083683028	m	0,999933210563	0,000066789437	m
65536	-0,238679671461	1,999889577150	0,000110422851		0,999996404268	0,000003595732	m
131072	1,248565967790	1,999973613170	0,000026386826	m	0,999980065310	0,000019934690	
262144	-28,213818211700	1,999988822720	0,000011177283	m	0,999995864096	0,000004135904	
524288	63,797892489700	1,999994624810	0,000005375191	m	0,999997771433	0,000002228567	m
1048576	9,590801968450	1,999997471920	0,000002528083	m	0,999998725105	0,000001274895	m
2097152	3,939400713830	1,999998804140	0,000001195860	m	0,999999201941	0,000000798059	m

Нахождение нулей полинома

$$x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8+16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0$$

Таблица 2

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,332701675670	1,332701675670	0,667298324333	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	2,045239523600	1,650967637550	0,349032362448	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	6,856156912900	2,653704879480	-0,653704879482		0,000000000000	-1,000000000000	
4	1,778375284680	1,984206918770	0,015793081226	m	-0,628318530718	-0,371681469282	m
8	3,772152077520	2,044953268630	-0,044953268633		-0,698131700798	-0,301868299202	m
16	0,348172043086	1,968786611040	0,031213388957		-0,923997839291	-0,076002160709	m
32	0,993534847417	1,974703683030	0,025296316974		-0,951997773815	-0,048002226185	m
64	1,937971654080	1,990412258620	0,009587741380	m	-0,966643893412	-0,033356106588	m
128	-30,582211191500	2,039391626800	-0,039391626805		-0,998490688350	-0,001509311650	m
256	2,926554556880	1,999874774880	0,000125225118	m	-0,990151770198	-0,009848229802	
512	-0,625436948679	1,999744289590	0,000255710409		-0,998205852895	-0,001794147105	
1024	-0,905803793245	2,000035054880	-0,000035054875	m	-0,999179712264	-0,000820287736	m
2048	-1,715356294650	2,000237372720	-0,000237372721		-0,999667354876	-0,000332645124	m
4096	-6,358483205960	2,000532998420	-0,000532998424		-0,999911354718	-0,000088645282	m
8192	4,902545843910	2,000119406810	-0,000119406812		-0,999649950923	-0,000350049077	
16384	0,881046001052	1,999949607690	0,000050392314		-0,999902696886	-0,000097303114	
32768	1,948788674460	1,999981569160	0,000018430837	m	-0,999933210563	-0,000066789437	m
65536	-16,758669720100	2,000059367150	-0,000059367147		-0,999996404268	-0,000003595732	m
131072	3,203718500850	2,000000857400	-0,000000857402	m	-0,999980065310	-0,000019934690	
262144	-0,141774945268	1,999998412280	0,000001587717		-0,999995864096	-0,000004135904	
524288	0,062697880567	1,999998992680	0,000001007319		-0,999997771433	-0,000002228567	m
1048576	0,417065781062	1,999999336820	0,000000663184	m	-0,999998725105	-0,000001274895	m
2097152	1,015382072280	1,999999600220	0,000000399776	m	-0,999999201941	-0,000000798059	m

На рис. 2 показано распределение подходящих дробей, определяющих корни уравнения (3.5).

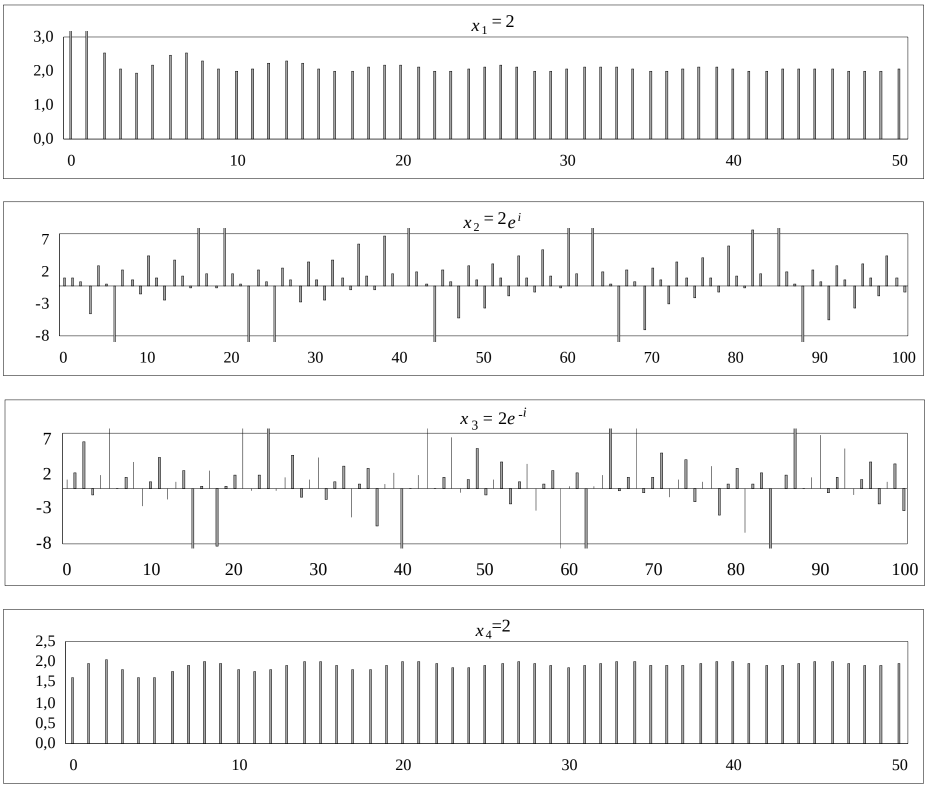

Рис. 2. Распределение подходящих дробей, определяющих корни уравнения (3.5)

Заключение

Для вычисления каждой вершины графа алгоритма Рутисхаузера требуется выполнение всего двух арифметических операций. Также чрезвычайно прост для программирования и r/φ-алгоритм, который используется при нахождении комплексных корней алгебраического уравнения. Все это делает предложенный в статье алгоритм нахождения всех корней алгебраического уравнения степени n весьма привлекательным для широкого его использования.

Особо хотелось бы обратить внимание на то, что формулы (2.1 – 2.4) есть аналитические выражения, представляющие корни полинома n-й степени через его коэффициенты. Используя формулы (2.1 – 2.4) можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Численные методы, разумеется, не способны к решению подобных задач. Аналитическое представление корней алгебраических уравнений n-й степени открывает новые возможности в исследовании математических моделей, которые тем или иным образом связаны с алгебраическими уравнениями высокого порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
2. *Шмойлов В.И., Тучапский Р.И.* Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. – Львов: Меркатор, 2003. – 83 с.
3. *Aitken A.* On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. - Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26), 289-305.
4. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.1. Периодические непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2004. – 645 с.
5. *Рутисхаузер Г.* Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.

Долгой Вячеслав Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)371-606.
Кафедра высшей математики; аспирант.

Dolgoy Vladimir Iliich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606.
The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

Шмойлов Владимир Ильич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: Shmoilov40@at.infotextt.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)318-910.

Shmoilov Vladimir Iliich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: Shmoilov40@at.infotextt.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)318-910.