

УДК 519.86

А.И. Сухинов, В.К. Гадельшин, Д.С. Любомищенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ SIP-МЕТОДА

В данной работе предложен подход моделирования поля ветровых течений на основе системы уравнений Навье-Стокса с учетом неровностей подстилающей поверхности. В качестве численного метода используется SIMPLE-метод для разнесенных сеточных значений давления и компонент скорости. Предложено описание неявного метода Стоуна для численного решения дискретных уравнений.

Моделирование поля ветровых течений; SIMPLE-метод; метод Стоуна (SIP).

A.I. Sukhinov, V.K. Gadelshin, D.S. Lubomishenko

MATHEMATICAL MODELING OF WIND FILDS IN SITY CONDITIONS USING SIP

In the paper there is an approach for wind field modeling in city conditions based on Navie-Stoks equations system. SIMPLE method on staggered grid is used as basic for solving the system. SIP method was applied for solving discretised equations.

Wind field modeling; SIMPLE-method; strongly implicit procedure (SIP).

Моделирование поля ветровых течений в условиях городской застройки является важным этапом в задаче мониторинга загрязнения окружающей среды. В данной работе предложен вариант SIMPLE-метода для построения поля течений ветра над неровной подстилающей поверхностью, позволяющий более точно находить решение данной задачи, а также предложена неявная процедура Стоуна для решения семиточечных СЛАУ специального вида.

Запишем базовую трехмерную систему уравнений для сжимаемого вязкого газа в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_{fi})}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_{ff} u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff,h} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + S_{ui}, \quad (2)$$

$$p = \rho RT, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k_{eff}}{C_{pm}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \frac{Q'''}{C_{pm}}. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность среды, μ_{eff} – эффективная вязкость, p – давление, u_i – компоненты вектора скорости в направлении трех координатных осей, u_{ff} – компоненты вектора скорости в направлении трех координатных осей, удовлетворяющие дискретному аналогу уравнения неразрывности (1).

Суть универсальной записи сводится к представлению уравнений (1), (2), (4) в форме уравнения переноса для переменной Φ :

$$\frac{\partial(\rho_m \Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m u_{ij} \Phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma_{eff} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] + S_\Phi. \quad (5)$$

Значения коэффициентов для разных уравнений приведены в табл. 1:

Таблица 1

Значения коэффициентов для различных типов уравнений

№ уравнения	Φ	Γ_{eff}	S_{eff}
1	1	0	0
2	u_i	μ_{eff}	$-\partial p / \partial x_i + \rho B_i + S_{u_i}$
4	T	k_{eff} / C_{pm}	Q'' / C_{pm}

Применим к уравнению (5) метод дискретизации, основанный на интегрировании по контрольному объему (ИОСВ). Контрольный объем, по которому осуществляется интегрирование, представлен на рис. 1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \Phi d\Omega + \int_S \rho u_{ij} \Phi dS = \int_S \Gamma_{eff} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} dS + \int_{\Omega} S_\Phi d\Omega. \quad (6)$$

Далее, расписывая интегралы по объему и поверхности, получим:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \Phi d\Omega \right]_p \approx \frac{\rho \Delta \Omega}{2 \Delta t} (3\Phi^{n+1} - 4\Phi^n + \Phi^{n-1}) = a_p^t \Phi_p^{n+1} - Q_\Phi^t, \quad (7)$$

где

$$a_p^t = \frac{3\rho \Delta \Omega}{2 \Delta t} \text{ и } Q_\Phi^t = \frac{\rho \Delta \Omega}{2 \Delta t} (4\Phi^n - \Phi^{n-1}).$$

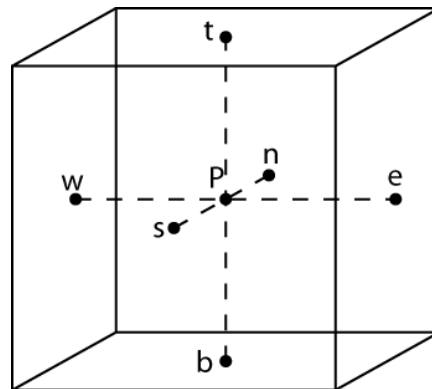


Рис. 1. Контрольный объем

Поверхностный интеграл $F^c = \int_S \rho u_{ff} \Phi dS$ в трехмерном пространстве представляется в виде суммы шести интегралов по соответствующим плоскостям контрольного объема:

$$F^c = F_w^c + F_e^c + F_s^c + F_n^c + F_b^c + F_t^c, \quad (8)$$

где, к примеру,

$$F_e^c = \int_S \rho u_{ff} \Phi dS \approx \dot{m}_e \Phi_e, \quad (9)$$

где $\dot{m}_e = \int_{S_e} \rho u \cdot \vec{n} dS \approx (\rho u)_e^{m-1} S_e$.

Аналогично расписывается поверхностный интеграл для диффузионных членов

$$F^d = \int_S \Gamma_{eff} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} dS \quad (10)$$

$$F^d = F_w^d + F_e^d + F_s^d + F_n^d + F_b^d + F_t^d, \quad (11)$$

где

$$F_e^d = \int_S \Gamma_{eff} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot \vec{n} dS \approx \Gamma_{eff} \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} S_e. \quad (12)$$

Вклад градиента давления для уравнения движения (2) в случае рассмотрения компоненты скорости \mathbf{u} можно представить в виде

$$Q^p = - \int_S p \cdot \vec{n} dS = -(p_e S_e - p_w S_w)^{m-1}. \quad (13)$$

В общем случае интеграл по объему для источникового члена уравнения можно представить в виде:

$$Q^s = \int_{\Omega} S_{\Phi} d\Omega \approx \bar{S}_{\Phi} \Delta V, \quad (14)$$

где

$$\bar{S}_{\Phi} = S_u + S_p \Phi_P. \quad (15)$$

Для аппроксимации конвективных членов используется схема отложенной коррекции. Суть данной схемы сводится к тому, что в процессе осуществления итераций вначале конвективные члены аппроксимируются по противоточным схемам, а когда происходит установление итерационного процесса, то аппроксимация осуществляется с помощью более точной центрально-разностной схемы. Например, на плоскости e контрольного объема поверхностный интеграл (9) можно записать:

$$F_e^c = \dot{m}_e \Phi_e^{UDS} + \dot{m}_e (\Phi_e^{CDS} - \Phi_e^{UDS})^{m-1}. \quad (16)$$

С учетом вышесказанного дискретную форму для переменной Φ можно записать в виде

$$a_p^t \Phi_P + F^c = F^d + Q^s + Q^t, \quad (17)$$

Или, если речь идет об уравнении движения (2), то в правой части появляется член, учитывающий давление:

$$a_p^t \Phi_p + F^c = F^d + Q^p + Q^s + Q^t. \quad (18)$$

Приведя подобные члены можно представить уравнение (17) в виде:

$$a_p \Phi_p + \sum_l a_l \Phi_l = Q_p, \quad (19)$$

где

$$a_p = a_p^t - \sum_l a_l, \quad l = E, W, N, S, T, B, \quad Q_p = Q^t + Q^p + Q^s + Q^c, \quad (20)$$

$$Q^c = \left[(F^c)^{UDS} - (F^c)^{CDS} \right]^{m-1},$$

$$a_E = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p}, \quad a_W = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p},$$

$$a_N = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p}, \quad a_S = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p},$$

$$a_T = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p}, \quad a_B = \min(\dot{m}_e, 0) - \frac{\Gamma_e S_e}{x_E - x_p}.$$

Уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^* + \dot{m}_n^* + \dot{m}_s^* + \dot{m}_t^* + \dot{m}_b^* = \Delta \dot{m}_p^*, \quad (21)$$

или

$$(\rho S u')_e - (\rho S u')_w + (\rho S v')_n - (\rho S v')_s + (\rho S w')_t - (\rho S w')_b + \Delta \dot{m}_p^* = 0. \quad (22)$$

Звездочки означают, что потоки массы считаются с использованием прогнозных компонент вектора скорости, не удовлетворяющих в общем случае уравнению неразрывности.

Алгоритм SIMPLE осуществляется в несколько этапов:

- 1) осуществляется вычисление прогнозных компонент вектора скорости (в общем случае полученные значения не удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности);
- 2) по прогнозным значениям компонент вектора скорости вычисляется поправка к давлению;
- 3) с использованием поправки к давлению вычисляются компоненты обновленного вектора скорости, удовлетворяющего дискретному аналогу уравнения неразрывности.

Прогнозное значение для u_e^* компоненты вектора скорости можно записать:

$$u_e^* = \frac{Q_p - Q^p - \sum_l a_l u_l^*}{a_p}. \quad (23)$$

Остальные компоненты вычисляются аналогично.

Далее решается уравнение для поправки к давлению:

$$a_p^p p'_p + \sum_l a_l^p p'_l = -\Delta \dot{m}_p^*, \quad l = E, W, N, S, T, B, \quad (24)$$

где

$$a_E^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^u}\right)_e, \quad a_W^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^u}\right)_w, \quad a_N^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^v}\right)_n, \quad a_S^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^v}\right)_s,$$

$$a_T^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^w}\right)_t, \quad a_B^p = -\left(\frac{\rho S^2}{a_p^w}\right)_b, \quad a_p^p = -\sum_l a_l^p, \quad l = E, W, N, S, T, B.$$

После того, как поправка к давлению найдена, по явным схемам корректируем прогнозное значения вектора скорости и находим давление на текущей итерации:

$$u'_e = u_e^* - \frac{S_e}{a_p} (p'_E - p'_P), \quad (25)$$

$$p = p^* + p'. \quad (26)$$

Для численного решения уравнения используется SIP-метод. Сеточная задача представляется в виде разреженной СЛАУ $A\Phi = b$.

Далее ищется приближенное разложение вида

$$M = LU = A + N, \quad (27)$$

где M – разреженная матрица, приближенно равная A , N – разреженная матрица с малыми элементами, L – нижнетреугольная матрица с тремя диагоналями, U – верхнетреугольная матрица с единичными элементами на диагонали и тремя побочными ненулевыми диагоналями.

Основной задачей является построение таких матриц L и U , чтобы их произведение M аппроксимировало оператор A как можно лучше. В результате перемножения матриц L и U указанного вида матрица M будет иметь шесть дополнительных диагоналей, вклад которых должен компенсироваться с помощью матрицы N .

Таким образом, вектор:

$$(M\Phi)_p = M_P \Phi_P + M_E \Phi_E + M_W \Phi_W + M_N \Phi_N + M_S \Phi_S + M_T \Phi_T + M_B \Phi_B +$$

$$+ M_{NW} \Phi_{NW} + M_{SE} \Phi_{SE} + M_{TW} \Phi_{TW} + M_{EB} \Phi_{EB} + M_{TS} \Phi_{TS} + M_{NB} \Phi_{NB} \quad (28)$$

Матрица N должна содержать шесть дополнительных диагоналей матрицы M . Необходимо задать элементы оставшихся диагоналей так, чтобы $N\Phi \approx 0$. В результате получаем уравнение:

$$M_{NW} (\Phi_{NW} - \Phi_{NW}^*) + M_{SE} (\Phi_{SE} - \Phi_{SE}^*) + M_{TW} (\Phi_{TW} - \Phi_{TW}^*) +$$

$$+ M_{EB} (\Phi_{EB} - \Phi_{EB}^*) + M_{TS} (\Phi_{TS} - \Phi_{TS}^*) + M_{NB} (\Phi_{NB} - \Phi_{NB}^*) \approx 0 \quad (29)$$

где Φ^* – аппроксимации для соответствующих Φ . Например, $\Phi_{NW}^* \approx \alpha(\Phi_W + \Phi_N - \Phi_P)$, $\alpha < 1$.

Формулы разложения имеют вид:

$$L_B^l = \frac{-A_B^l}{\left(1 + \alpha(U_N^{l-N_i N_j} + U_E^{l-N_i N_j})\right)},$$

$$L_W^l = \frac{-A_W^l}{\left(1 + \alpha(U_N^{l-N_j} + U_T^{l-N_j})\right)},$$

$$L_S^l = \frac{-A_S^l}{\left(1 + \alpha(U_E^{l-1} + U_T^{l-1})\right)},$$

$$L_P^l = \frac{1}{\left(\begin{aligned} &A_P^l + \alpha(L_B^l U_N^{l-N_i N_j} + L_W^l U_N^{l-N_j}) + \alpha(L_B^l U_E^{l-N_i N_j} + L_S^l U_E^{l-1}) + \\ &\alpha(L_W^l U_T^{l-N_j} + L_S^l U_T^{l-1}) - L_B^l U_T^{l-N_i N_j} - L_W^l U_E^{l-N_j} - L_S^l U_T^{l-1} \end{aligned} \right)}, \quad (30)$$

$$U_N^l = \left(-A_N^l - \alpha(L_B^l U_N^{l-N_i N_j} + L_W^l U_N^{l-N_j}) \right) U_P^l,$$

$$U_E^l = \left(-A_E^l - \alpha(L_B^l U_E^{l-N_i N_j} + L_S^l U_E^{l-1}) \right) U_P^l,$$

$$U_T^l = \left(-A_T^l - \alpha(L_W^l U_T^{l-N_j} + L_S^l U_T^{l-1}) \right) U_P^l.$$

Далее осуществляется последовательное решение исходной задачи обычным методом LU -разложения:

$$LU \delta^{n+1} = \rho^n, \quad (31)$$

$$U \delta^{n+1} = L^{-1} \rho^n = R^n, \quad (32)$$

$$R^l = \left(\rho^l - L_S^l R^{l-1} - L_W^l R^{l-N_j} - L_B^l R^{l-N_i N_j} \right) / L_P^l, \quad (33)$$

$$\delta^l = R^l - U_N^l \delta^{l+1} - U_E^l \delta^{l+N_j} - U_T^l \delta^{l+N_i N_j}. \quad (34)$$

Численный эксперимент проводился для перекрестка города. На рис. 2 представлены результаты моделирования:

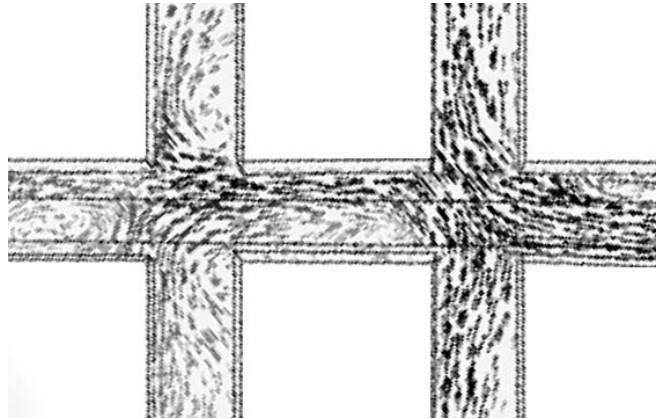


Рис. 2. Результаты численного эксперимента для перекрестка

В работе предложен алгоритм моделирования поля ветровых течений в условиях городской застройки. Численная реализация основана на универсальном дискретном уравнении. В качестве базовой процедуры решения системы уравнений Навье–Стокса используется SIMPLE-метод. Предложено описание неявного алгоритма Стоуна для решения СЛАУ специального вида, получающихся в ходе аппроксимации сеточных задач. В работе представлены результаты моделирования для одного из перекрестков улично-дорожной сети города Таганрога.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнений атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 271 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
3. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. – СПб.: Гидрометеиздат, 2000. – 779 с.
4. Патанкар С. В. Численные методы решения задач обмена и динамики жидкости. Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
5. Ferziger J., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics - 3., rev. ed. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. – 423 с.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Chief of TIT SFedU; professor.

Гадельшин Валерий Камельянович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: gadelshin@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)601-461.

Кафедра высшей математики; доцент.

Gadelshin Valeriy Kamelianovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: gadelshin@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)601-461.

The Department of Higher Mathematics; associate professor.

Любомищенко Денис Сергеевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: dexusint@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)601-219.

Кафедра высшей математики; аспирант.

Lubomishenko Denis Sergeevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: dexusint@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)601-461.

The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

УДК 519.4

А.И. Сухинов, А.А. Черчаго

**ОЦЕНКА КОНЦЕНТРАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
ADCP-ЗОНДА**

В исследовании представляется метод определения концентрации взвешенных частиц в водной среде на основе данных, собранных при помощи акустического доплеровского профилографа течений (ADCP, RDI Workhorse, 600kHz) с калибровкой оптическим обратным датчиком (SBE 19 Plus), данные которого используются для уточнения упрощенного варианта гидролокационного уравнения, которое преобразует записанные ADCP-зондом данные об интенсивности эхо-сигнала в SSC (Suspended Sediment Concentration).

ADCP; акустический Доплеровский профилограф; концентрация взвешенных частиц; эхо-сигнал.

A.I. Sukhinov, A.A. Cherchago

**ESTIMATION OF WEIGHED PARTICLES' CONCENTRATION USING
ACOUSTIC BACK DISPERSION OF AN ADCP-PROBE**

This study presented simultaneously collected acoustic Doppler current profiler (ADCP, RDI Workhorse, 600kHz) and suspended sediment concentration data, obtained with an optical backscatter sensor (SBE 19 Plus). These data are utilized to calibrate a simplified version of the sonar equation that converts the recorded by the ADCP echo intensity into SSC (Suspended Sediment Concentration).

ADCP; Accoustic Doppler current profiler; Suspended sediment concentration (SSC); echo intensity.

Введение

Исследование эрозии, переноса и осаждения взвеси имеют важное значение для экологических исследований водных объектов. Кроме того, геоморфологические исследования, связанные с появлением или изменениями наносов для судоходных каналов, требуют детальной информации о динамике донных отложений и в частности их пространственном и временном распределении.