

E-mail: sukhinov@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.
Chief of TIT SFedU; professor.

Черчаго Антон Александрович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: tcherchago@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 8(863)371-606; 7(928)920-48-34.
Кафедра высшей математики; аспирант.

Cherchago Anton Alexandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: tcherchago@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 8(8634)371-606; 7(928)920-48-34.
The Department of Higher Mathematics; post-graduate student.

УДК 519.63:532.55

А.И. Сухинов, М.Д. Чекина

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ
ДИНАМИКИ ВЫПАДЕНИЯ ОСАДКОВ И ЗАТОПЛЕНИЯ**

Целью данной работы является оценка скоплений дождевой воды и прогнозирование затоплений. Проводится исследование динамики затопления некоторой области. Для решения этой задачи построена математическая модель на основе уравнения Сен-Венана. В результате были получены сеточные функции высоты столба жидкости, а также картины динамики затопления области. Полученные результаты являются физическими и согласуются с ожидаемыми.

Динамика затопления; уравнение Сен-Венана; русловые потоки.

A.I. Sukhinov, M.D. Chekina

**MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL METHOD OF WASTEWATER
GATHERING AND FLOOD FORECASTING**

The main purpose of the work is to create an estimation of wastewater gathering and flood forecasting. Investigation of flood of some region was considered in the work. Mathematical model of the task is based on Saint-Venant equation. The results of the investigation are the mesh functions of the height of liquid column and pictures of flood of the region dynamics. Received results correspond to the expected one.

Flood dynamics; Saint-Venant equation; channel flow.

Введение

Данная работа посвящена оценке скоплений дождевой воды и прогнозированию затоплений. Была взята произвольная область с различными уровнем грунта и характеристиками впитывания.

Для решения этой задачи было использовано уравнение Сен-Венана, связывающее высоту столба воды с потоком, и вспомогательное уравнение, задающее коэффициенты впитывания грунта.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается распределение осадков в модельной области, показанной на рис. 1.

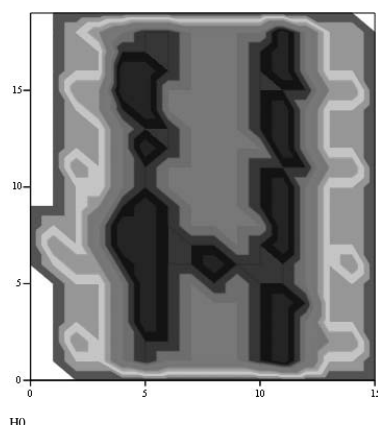


Рис. 1. Распределение осадков в модельной области

Ось Ox направим вертикально вверх, ось Oy – слева направо. На рисунке фиолетовым цветом показана наибольшая глубина, а красным наименьшая.

Для решения этой задачи построим математическую модель на уравнения Сен-Венана [3], которое объединяет глубину H с потоком Q :

$$H'_t = Q'_x + Q'_y - z + f, \quad (1)$$

где z – функция, задающая степень впитывания в области (сток), а f – источник, т.е. в нашем случае – это количество осадков.

Запишем уравнение, характеризующее впитывание:

$$z'_t = -k_1 z + k_2, \quad (2)$$

$$\begin{cases} k_1 > k_2 & H \neq H_0 \\ k_1 = 0 & H = H_0, \end{cases}$$

где k_1 – коэффициент промокания, k_2 – коэффициент, задающий скорость впитывания, H – высота водяного столба, H_0 – естественный уровень воды.

Выражение для потока:

$$Q = \begin{cases} K_1((1 + K_2 \operatorname{tg} \varphi)^\beta - 1), & \varphi \geq \varphi_0 \\ 0, & \varphi < \varphi_0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$, φ – угол наклона, K_1 , K_2 и β – характеристики текучести жидкости.

Граничные условия задаем в форме Неймана:

$$H'_n = 0.$$

Для отыскания решения данной задачи нам необходимо рассмотреть систему (1-3).

Проведем преобразования, выражая поток Q через высоту H , получим:

$$H'_i = (K(H)H'_x)'_x + (K(H)H'_y)'_y - z + f, \quad (4)$$

где

$$K(H) = \frac{K_1((1 + K_2 \operatorname{tg} \varphi)^\beta - 1)}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (5)$$

Итак, в результате нужно рассмотреть систему уравнений (4) и (2).

Дискретизация непрерывной модели

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для ячеек сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных схем будем называть интегро-интерполяционным методом [1].

Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку: $w_h = \{x_i = ih_x, y_i = jh_y; i = \overline{1..N_x}, j = \overline{1..N_y}; N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\}$.

В уравнении (4) вместо частных производных будем использовать из конечноразностные аналоги, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода. В итоге получим следующую разностную схему:

$$H_{ij}^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + K_{i+\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} + K_{i-\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} + K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2} + K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2} \right) - H_{i+1j}^{n+1} K_{i+\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} - \\ - K_{i-\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} H_{i-1j}^{n+1} - K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2} H_{ij+1}^{n+1} - K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2} H_{ij-1}^{n+1} = \frac{1}{\tau} H_{ij}^n - z_{ij}^n + f_{ij}^n. \quad (6)$$

Определенную сложность представляет аппроксимация коэффициентов (5). Проведем ее следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K(H) &= \frac{1}{tg\varphi} \beta K_1 \ln(1 + K_2 tg\varphi) = \frac{1}{tg\varphi} \beta K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (K_2 tg\varphi)^n = \\
 &= \frac{1}{tg\varphi} \beta K_1 \left(K_2 tg\varphi - \frac{1}{2} K_2^2 tg^2\varphi + \frac{1}{3} K_2^3 tg^3\varphi + O(tg^4\varphi) \right) = \\
 &= \beta K_1 K_2 - \frac{1}{2} K_1 K_2^2 tg\varphi + \frac{1}{3} K_1 K_2^3 tg^2\varphi + O(tg^3\varphi),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H_{i+1j}^n - H_{i-1j}^n}{2h_x} \right)^2 + \left(\frac{H_{ij+1}^n - H_{ij-1}^n}{2h_y} \right)^2} + O(h_x^2 + h_y^2). \tag{8}$$

Аппроксимируем уравнение (2):

$$\frac{z_{ij}^{n+1} - z_{ij}^n}{\tau} = -k_{1,ij} z_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + k_{2,ij}, \tag{9}$$

где

$$z_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2} z_{ij}^n. \tag{10}$$

В граничных узлах получаем следующие выражения:

- ◆ верхняя граница $(x, y) \in \Gamma_{x-}$:

$$(K(H)H'_x)'_x \cong K_{i+\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1});$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H_{i+1j}^n - H_{ij}^n}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{H_{ij+1}^n - H_{ij-1}^n}{2h_y} \right)^2};$$

- ◆ нижняя граница $(x, y) \in \Gamma_{x+}$:

$$(K(H)H'_x)'_x \cong -K_{i-\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1});$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H_{ij}^n - H_{i-1j}^n}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{H_{ij+1}^n - H_{ij-1}^n}{2h_y} \right)^2};$$

- ◆ левая граница $(x, y) \in \Gamma_{y-}$:

$$(K(H)H'_y)'_y \cong K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij+1}^{n+1} - H_{ij}^{n+1});$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H_{i+1j}^n - H_{i-1j}^n}{2h_x} \right)^2 + \left(\frac{H_{ij+1}^n - H_{ij}^n}{h_y} \right)^2};$$

- ♦ правая граница $(x, y) \in \Gamma_{y+}$:

$$(K(H)H'_y)'_y \cong -K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{ij-1}^{n+1});$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H_{i+1j}^n - H_{i-1j}^n}{2h_x}\right)^2 + \left(\frac{H_{ij}^n - H_{ij-1}^n}{h_y}\right)^2}.$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы

Найдем порядок погрешности аппроксимации для

$$(K(H)H'_x)'_x \cong K_{i+\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K_{i-\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1}). \quad (11)$$

Разложим в ряд Тейлора H_{i+1j}^{n+1} , H_{i-1j}^{n+1} и $K_{i+1j}^n(H)$, $K_{i-1j}^n(H)$ в точках $(i, j, n+1)$ и (i, j, n) соответственно:

$$H_{i\pm 1j}^{n+1} = H_{ij}^{n+1} \pm h_x H_{ij}^{\prime n+1} + \frac{h_x^2}{2} H_{ij}^{\prime\prime n+1} \pm \frac{h_x^3}{6} H_{ij}^{\prime\prime\prime n+1} + O(h_x^4);$$

$$K_{i\pm 1j}^n(H) = K_{ij}^n(H) \pm \frac{h_x}{2} K_{ij}^{\prime n}(H) + \frac{h_x^2}{8} K_{ij}^{\prime\prime n}(H) \pm \frac{h_x^3}{48} K_{ij}^{\prime\prime\prime n}(H) + O(h_x^4).$$

Подставим полученные выражения в (11) и после приведения подобных получим

$$K_{i+\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K_{i-\frac{1}{2}j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1}) =$$

$$= K_{ij}^{\prime n+1}(H) H_{ij}^{\prime\prime n+1} + K_{ij}^{\prime\prime n+1}(H) H_{ij}^{\prime n+1} + O(h_x^2 + \tau) = (K(H)H'_x)'_x + O(h_x^2 + \tau)$$

Аналогично для

$$(K(H)H'_y)'_y \cong K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij+1}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{ij-1}^{n+1});$$

$$K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij+1}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{ij-1}^{n+1}) =$$

$$= K_{ij}^{\prime n+1}(H) H_{ij}^{\prime\prime n+1} + K_{ij}^{\prime\prime n+1}(H) H_{ij}^{\prime n+1} + O(h_y^2 + \tau) = (K(H)H'_y)'_y + O(h_y^2 + \tau).$$

Учитывая порядок погрешности аппроксимации коэффициентов $K(H)$ формулы (7-8), получим, что порядок аппроксимации схемы (6) будет равен $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau)$.

Найдем порядок погрешности аппроксимации для схемы (9).

Разложим в ряд Тейлора z_{ij}^{n+1} и z_{ij}^n в точке $(i, j, n + \frac{1}{2})$:

$$z^{n+1} = z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3);$$

$$z^n = z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3).$$

Подставим полученные ряды в выражения для производной $\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau}$ и

для $z_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$, имеем:

$$\frac{z_{ij}^{n+1} - z_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3) \right) = z'^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2);$$

$$\frac{1}{2} (z_{ij}^{n+1} + z_{ij}^n) = \frac{1}{2} (z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} z'^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{8} z''^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^3)) = z^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2).$$

Порядок погрешности аппроксимации для схемы (9) $O(\tau^2)$.

Устойчивость разностной схемы

Проверим устойчивость разностной схемы к возмущению входных данных.

Выделяется две совокупности узлов и остальные узлы, которые называют окрестностью узла (i, j) .

Каноническая форма записи сеточного уравнения [1]:

$$Ly(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \in \mathcal{N}'(P)} B(P, Q)y(Q) = F(P),$$

где $P \equiv (x_{1,i}, x_{2,j})$ – центр шаблона,

$\mathcal{N}'(P) = \left\{ (x_{1,i+1}, x_{2,j}), (x_{1,i-1}, x_{2,j}), (x_{1,i}, x_{2,j+1}) \right\}$ – окрестность центра шаблона, $Q \in \mathcal{N}'(P)$.

Выпишем коэффициенты $A(P)$ и $B(P, Q)$ для схемы (6):

$$A(P) = \frac{1}{\tau} + K_{i+\frac{1}{2},j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} + K_{i-\frac{1}{2},j}^n(H) \frac{1}{h_x^2} + K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2} + K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2};$$

$$B(P, Q_{x+}) = K_{i+\frac{1}{2},j}^n(H) \frac{1}{h_x^2};$$

$$B(P, Q_{x-}) = K_{i-\frac{1}{2},j}^n(H) \frac{1}{h_x^2};$$

$$B(P, Q_{y+}) = K_{ij+\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2};$$

$$B(P, Q_{y-}) = K_{ij-\frac{1}{2}}^n(H) \frac{1}{h_y^2}.$$

Проверим условия принципа максимума [1]:

$$\begin{cases} A(P) > 0 \\ B(P, Q) > 0 \\ A - \sum_{Q \in \emptyset \setminus (P)} B(P, Q) \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что условие (12) выполняется для всех положительных коэффициентов $K(H)$, а это значит, что схема (6) устойчива.

Консервативность дискретной модели

При написании разностных схем следует добиваться, чтобы эти схемы выражали на сетке соответствующий закон сохранения. Такие схемы называются консервативными [1].

Проверим консервативность для нашей дискретной модели.

Просуммируем $(K(H)H'_x)'_x$ по i .

$$\begin{aligned} & K^n_{N_1+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1+j}^{n+1} - H_{N_1j}^{n+1}) + \sum_{i=N_1+1}^{N_2-1} \left(K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1}) \right) - \\ & - K^n_{N_2-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2j}^{n+1} - H_{N_2-1j}^{n+1}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \left(K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1}) \right) + \\ & + K^n_{N_1-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1j}^{n+1} - H_{N_1-1j}^{n+1}) - K^n_{N_2+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2+j}^{n+1} - H_{N_2j}^{n+1}) = \\ & = \sum_{i=N_1}^{N_2} K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - \sum_{i=N_1}^{N_2} K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{i-1j}^{n+1}) + \\ & + K^n_{N_1-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1j}^{n+1} - H_{N_1-1j}^{n+1}) - K^n_{N_2+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2+j}^{n+1} - H_{N_2j}^{n+1}) = \\ & = \sum_{i=N_1}^{N_2} K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - \sum_{i=N_1-1}^{N_2-1} K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) + \\ & + K^n_{N_1-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1j}^{n+1} - H_{N_1-1j}^{n+1}) - K^n_{N_2+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2+j}^{n+1} - H_{N_2j}^{n+1}) = \\ & = K^n_{N_2+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2+j}^{n+1} - H_{N_2j}^{n+1}) - K^n_{N_1-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1j}^{n+1} - H_{N_1-1j}^{n+1}) + \\ & + K^n_{N_1-\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_1j}^{n+1} - H_{N_1-1j}^{n+1}) - K^n_{N_2+\frac{1}{2}j}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{N_2+j}^{n+1} - H_{N_2j}^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для $(K(H)H'_y)'_y$:

$$\begin{aligned} & K^n_{iM_1+\frac{1}{2}}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{iM_1+1}^{n+1} - H_{M_1j}^{n+1}) + \sum_{i=M_1+1}^{M_2-1} \left(K^n_{ij+\frac{1}{2}}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij+1}^{n+1} - H_{ij}^{n+1}) - K^n_{ij-\frac{1}{2}}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{ij}^{n+1} - H_{ij-1}^{n+1}) \right) - \\ & - K^n_{iM_2-\frac{1}{2}}(H) \frac{1}{h_x^2} (H_{iM_2}^{n+1} - H_{iM_2-1}^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, баланс на дискретном уровне как для оператора диффузионного переноса, так и для всего уравнения сохраняется, значит схема консервативна.

Метод верхней релаксации

Для решения полученной СЛАУ использовался метод верхней релаксации [2]. Любой двухслойный итерационный метод можно записать в следующей канонической форме:

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = f, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y^0 = u_0.$$

Каноническая форма для метода верхней релаксации

$$\begin{cases} (D + \omega A^-) \frac{(y^{s+1} - y^s)}{\omega} + Ay^s = f \\ y^0 \equiv u \end{cases}$$

Видим, что

$$B = D + \omega A^-, \quad \tau = \omega.$$

После преобразований получим

$$\left(A^- + \frac{1}{\omega} D \right) y^{s+1} + \left(A^+ + \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) D \right) y^s = f,$$

где A^+ – верхняя треугольная (наддиагональная) матрица, A^- – нижняя треугольная (поддиагональная) матрица, D – диагональная матрица.

Отсюда находим итерационную формулу:

$$y_i^{s+1} = (1 - \omega) y_i^s + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=i}^N a_{ij} y_j^s - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{s+1} \right).$$

В данной задаче мы использовали значение веса $\omega = 1,80$.

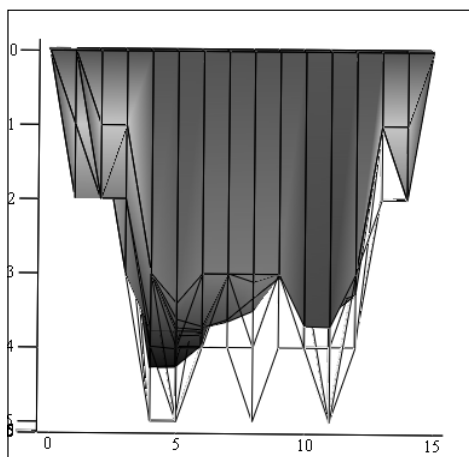
Результаты численных экспериментов

Для области, показанной на рис. 1, получены следующие результаты:

- ◆ при интенсивности осадков $f=1$ и коэффициенте промокания $k_1=0,1$, коэффициенте впитывания $k_2=0,1$ в полосе области, с седьмой по однунадцатую строку (по оси Oy) и $k_1=1,5$, $k_2=1$ по краям области, 50 итерациях по времени результат показан на рис. 2;
- ◆ при 200 итерациях, источнике $f=1$ до 150 итерации, $f=0$ после и при тех же остальных параметрах результат показан на рис. 3;
- ◆ при 500 итерациях, источнике $f=1$ до 400 итерации, $f=0$ после и тех же остальных параметрах (рис. 4).

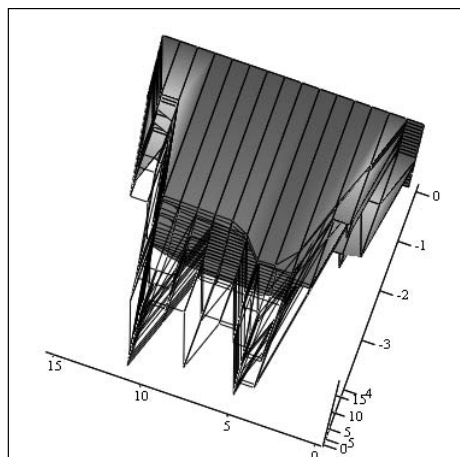
На рис. 2-4 закрашенная область есть уровень воды, а незакрашенная – исходный рельеф.

Можно видеть, что в первую очередь происходит затопление в частях области с небольшим впитыванием, что видно из рис. 2, но при большой продолжительности осадков (или их высокой интенсивности) затопливается вся область, таким образом, результаты численных экспериментов совпадают с ожидаемыми.



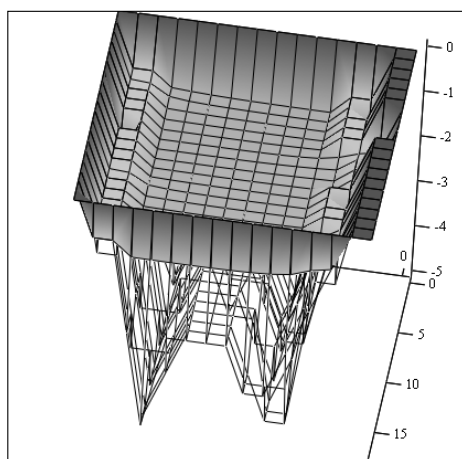
н, н0

Рис. 2. 50 итераций



н, н0

Рис. 3. 200 итераций



н, н0

Рис. 4. 500 итераций

Заключение

Данная работа посвящена оценке скоплений дождевой воды и прогнозированию затоплений. Модель, полученная в ходе работы, в дальнейшем может быть использована для предварительной проверки эффективности дождевых канализаций в городских условиях.

Для решения этой задачи было использовано уравнение Сен-Венана, связывающее высоту столба воды с потоком, и вспомогательное уравнение, задающее коэффициенты впитывания грунта.

Результатом работы программы являются сеточные функции высоты столба жидкости, а также картины динамики затопления области. Полученные результаты являются физическими и согласуются с ожидаемыми.

В ходе выполнения работы было сделано:

- ◆ построена непрерывная математическая модель для расчета скоплений дождевой воды, учитывающая такие физические характеристики, как:

рельеф местности, количество осадков, степень промокания и впитывания грунта;

- ◆ выполнена дискретизация непрерывной модели с помощью интегро-интерполяционного метода;
- ◆ выполнены аналитические исследования погрешности аппроксимации, устойчивости и консервативности дискретной модели;
- ◆ выполнена программная реализация модели на языке высокого уровня C++;
- ◆ проведен ряд численных экспериментов;
- ◆ сделана анализ результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 666 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.
3. Колдоба А.В., Повецenco Ю.А. Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000. – 254 с.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Руководитель ТТИ ЮФУ; профессор.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(8634)310-599; 7(928)102-11-06.

Chief of TIT SFedU; professor.

Чекина Мария Дмитриевна

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: elfik55@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 8(928)154-15-26.

Кафедра высшей математики; студентка.

Chekina Maria Dmitrievna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: elfik55@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 8(928)154-15-26.

The Department of Higher Mathematics; student.