Раздел IV. Автоматизированные системы управления

УДК 62 – 501.462

А.Р. Гайдук

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ЭНЕРГОСИСТЕМАМИ

Получены условия асимптотической устойчивости разомкнутых и замкнутых распределенных энергосистем. Показано, что децентрализованное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутых управляемых распределенных энергосистем лишь при ограниченной интенсивности взаимодействия подсистем. Приведён численный пример децентрализованного управления.

Большая энергосистема; распредёленная; децентрализованное управление; устойчивость; функция Ляпунова; уравнение Риккати.

A.R. Gaiduk

CONTROL DESIGN OF DISTRIBUTED POWER SYSTEMS

Conditions have been defined for asymptotic stability of open-loop and closed-loop distributed systems. The paper shows that, generally, decentralized control can ensure asymptotic stability of closed-loop controllable distributed systems only in conditions of limited intensity interaction of subsystems. A numerical example of decentralized control system design is provided.

Large-scale distributed power system; decentralized control; stability, Lyapunov function; Riccati equation.

Введение. Проблема синтеза больших распределенных систем, состоящих из значительного числа связанных подсистем имеет большое значение для практики автоматического управления, в частности энергосистемами. Она рассматривалась в работах [1, 2] и многих других. В ранних работах рассматривались системы с централизованным линейным управлением. Однако при большой распределённости системы, как например, в случаях систем энергоснабжения, реализация этого управления представляет большие технические сложности.

В связи с этим в работе [2] было предложено децентрализованное управление, реализация которого значительно проще по сравнению с централизованным управлением.

В данной работе основное внимание уделяется получению простых, достаточных условий асимптотической устойчивости распределенных систем с децентрализованным управлением. При этом используется метод функций Ляпунова.

Постановка задачи. Рассмотрим большую распределённую систему, которая описывается уравнениями:

$$\dot{x} = A_i x_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} A_{ij} x_i + B_i u_i + H_i f_i \ , \quad y_i = C_i x_i \, , \quad i = \overline{1, N} \, , \tag{1}$$

где $x_i \in R^{n_i}$, $u_i \in R^{m_i}$, $f_i \in R^{k_i}$ – вектора состояния, управления и внешних воздействий; A_i, B_i – постоянные матрицы коэффициентов i-ой локальной подсистемы, A_{ij} – постоянные матрицы соответствующих размерностей, описывающие взаимосвязи и взаимовоздействия подсистем, N – число последних.

При отсутствии управлений локальные подсистемы и вся распределенная система неустойчивы. Другие особенности рассматриваемой системы (1) будут указаны ниже.

Задача синтеза заключается в определении управлений u_i, $i = \overline{1, N}$ так, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчива в целом. В общем случае матрицы A_{ij} при всех $i, j = \overline{1, N}$ могут удовлетворять условию

$$A_{ij} \equiv 0, \quad i > j \text{ или } i < j. \tag{2}$$

Распределенную систему (1) в этом случае будем называть разомкнутой.

Если условие (2) не выполняется хотя бы при одном значении i, то систему (1) будем называть замкнутой. Это свойство больших систем является очень существенным с точки зрения их устойчивости.

Децентрализованное управление. В этом случае управление каждой локальной подсистемы определяется лишь её собственными переменными состояния, т.е.

$$u_i = -K_i x_i, \quad i = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Децентрализованное управление (3) имеет ограниченные возможности по обеспечению желаемых межсистемных связей, из-за относительно малого (по сравнению с централизованным управлением [2]) числа ($n \times N$) варьируемых параметров. В общем случае, устойчивость большой распределённой управляемой системы (1), (3) может быть обеспечена, если только сепаратные подсистемы взаимодействуют с достаточно малой интенсивностью. Поэтому ниже рассматривается задача синтеза децентрализованного управления (3) и оценки допустимой интенсивности взаимодействия локальных подсистем.

Предположим, пары матриц A_i, B_i при всех $i = \overline{1, N}$ являются вполне управляемыми. Тогда матрицы K_i из выражений (3) могут быть определены равенствами

$$K_i = M_i^{-1} B_i \Pi_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4}$$

где Π_i – матрицы, являющиеся решениями уравнений Риккати вида

$$A_i^T \Pi_i + \Pi_i A_i - \Pi_i B_i M_i^{-1} B_i^T \Pi_i = -Q_i, \quad i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Здесь $Q_i \in R^{n_i}$, $M_i \in R^{m_i}$ – матрицы весовых коэффициентов функционалов

$$J_i = \int_0^\infty (x_i^T Q_i x_i + u_i^T M_i u_i) dt, \quad i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

определяющих качество изолированных (т.е. без учета их взаимодействия) локальных подсистем. Здесь $Q_i \geq 0$, $M_i > 0$ при всех $i = \overline{1, N}$.

Управления (3) – (6) гарантируют устойчивость всей распределенной системы (1), (3), (5) [2, 3], если только она является разомкнутой. Чтобы сформулировать условие устойчивости замкнутой распределённой системы введем матрицы P_i, являющиеся решением уравнений Ляпунова:

$$D_i^T P_i + P_i D_i = -C_i\,, \quad i = \overline{1, N}\,, \tag{7}$$

где

$$D_i = A_i - B_i K_i\,. \tag{8}$$

Введем также квадратную блочную матрицу $W = [w_{ij}]$, $i,\ j = \overline{1, N}$, где блоки w_{ij}

$$w_{ij} = \begin{cases} C_i\,, & i = j \\ -A_{ji}^T P_j - P_i A_{ij}, & i \neq j \end{cases}, \tag{9}$$

Матрица W является симметричной, так как

$$(w_{ij})^T = -P_j A_{ji} - A_{ij}^T P_i = -A_{ij}^T P_i - P_j A_{ji} = w_{ji}\,, \tag{10}$$

поэтому для оценки положительной определенности матрицы W можно использовать критерий Сильвестра [1]. Уравнения свободной системы (1) при децентрализованном управлении (3) с учетом (13) принимают вид

$$\dot{x} = D_i x_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} A_{ij} x_i\ . \tag{11}$$

Теорема 1. Если распределенная система (1) является разомкнутой, т.е. выполнено условие (2), и, кроме того, выполнены условия (9), (10), где $Q_i \geq 0$, $M_i > 0$ при всех $i = \overline{1, N}$, то децентрализованная система (11) или (1), (3) асимптотически устойчива. ■

Условие устойчивости замкнутой распределенной системы (1) с децентрализованным управлением (3) определяется следующей теоремой.

Теорема 2. Если распределенная система (1) является замкнутой, т.е. условие (2) не выполняется, но выполнены условия (4), (5), где $Q_i \geq 0$, $M_i > 0$ при всех $i = \overline{1, N}$, и, кроме того, матрица W, определяемая соотношениями (9), является положительно определенной [1], то есть

$$W > 0\,, \tag{12}$$

то децентрализованная система (1), (3) асимптотически устойчива. ■

Доказательство теоремы 2 проводится с помощью функции Ляпунова

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^T P_i x_i$$

стандартным путём.

Отметим в заключение данного раздела, что из условия (12) с помощью критерия Сильвестра можно всегда получить условия на коэффициенты матриц A_{ij},

$j \neq i$, $i, j = \overline{1, N}$, при которых замкнутая система (1), (3) будет асимптотически устойчивой. Соответствующий пример приведён ниже.

Однако в случае большого числа локальных подсистем применение критерия Сильвестра может быть сильно затруднено из-за высокой размерности соответствующих определителей. В этих случаях удобнее пользоваться более простым критерием, изложенным далее.

Однотипные подсистемы. Предположим, что условие (2) не выполняется, т.е. управляемая система (1) является замкнутой. Обозначим

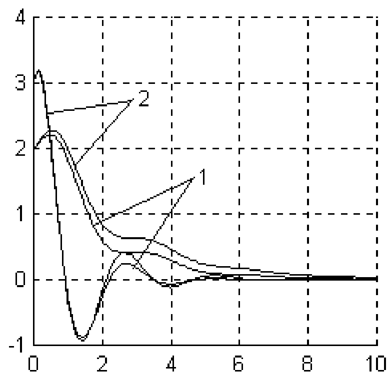
$$\Delta = \max_{i\,j} \left\| A_{ji}^T P_{ei} - P_{ei} A_{ij} \right\|,$$

где P_{ei} – решение уравнений Ляпунова (12) при $C_i = E$, а $\|\cdot\|$ – обозначение матричной нормы [8]. Величина Δ является, очевидно, некоторой мерой интенсивности взаимодействия локальных подсистем.

Обозначим также через ε малое положительное число. Тогда справедлива следующая теорема – один из основных результатов данной работы.

Теорема 3. Если при $N \geq 2$ выполняются условия: а) $A_{ij} \neq 0$, хотя бы при одном $i \neq j$, б) при всех $i = \overline{1, N}$ матрицы D_i в уравнениях (8) являются гурвицевыми, в) $\Delta < 1/N - 1 + \varepsilon$, то большая децентрализованная система (1), (3) асимптотически устойчива. ■

Доказательство этой теоремы проводится методом функций Ляпунова и, ввиду очевидности, здесь не приводится. Для демонстрации технологии применения полученных результатов и степени их эффективности приведём численный пример.



Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из трех локальных подсистем. Методика построения оптимальных управлений на основе алгебраического уравнения Риккати хорошо описана во многих книгах (см. например [2]). Поэтому ограничимся здесь рассмотрением лишь задачи определения допустимых интенсивностей взаимодействия локальных подсистем. Другими словами, будем предполагать, что матрицы K_i децентрализованных управлений (3) уже определены путём решения соответствующих уравнений Риккати (5), и система описывается уравнением (11), где

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0,21 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,21 \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad D_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Параметры α и β характеризуют интенсивность взаимосвязей между локальными подсистемами. Если эти параметры α и β равны нулю, то рассматриваемая система является разомкнутой. В этом случае, в соответствии с теоремой 1, она будет асимптотически устойчивой при любых матрицах A_{ij}, $j \neq i$, $i, j = \overline{1, 3}$.

Если же параметры α и β не равны нулю, то рассматриваемая система является замкнутой. В этом случае она будет асимптотически устойчивой лишь при достаточно малых значениях коэффициентов матриц A_{ij}, $j > i$, $i, j = \overline{1, 3}$ и параметров α и β.

Для оценки допустимых значений параметров α и β положим в уравнениях Ляпунова (7) $C_i = E$ и найдем P_i. Затем по формулам (9) вычислим матрицы w_{ij} при всех $i, j = \overline{1, 3}$ и составим матрицу W. С помощью критерия Сильвестра легко установить, что она будет положительно определённой, а рассматриваемая система соответственно асимптотически устойчивой, при всех $0 < \alpha \leq 0{,}1$ и $0 < \beta \leq 0{,}14$.

Об этом же свидетельствуют и приведенные на рисунке кривые её переходных процессов по переменным $x_{12}(t)$ и $x_{13}(t)$, полученные в MATLAB при $x_0 = [1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 3\ 0]^T$ и $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}14$ (кривые 2). Для сравнения здесь же приведены и графики этих функций при $\alpha = \beta = 0$ (кривые 1). Как видно, перекрёстные связи оказывают существенное влияние на ход переходных процессов в распределённой энергосистеме с децентрализованным управлением, но при невысокой интенсивности взаимосвязей локальных подсистем, большая система сохраняет свойство устойчивости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
2. *Siljak D.D.* Large – Scale Dynamic Systems: Stability and structure. New York: North – Holland, 1978.
3. *Гайдук А.Р.* К исследованию устойчивости линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 3. – С. 153-162.

Гайдук Анатолий Романович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: gaiduk_2003@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371689.

Кафедра систем автоматического управления; профессор.

Gaiduk Anatoliy Romanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: gaiduk_2003@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 88634371689.

The Department of Automatic Control Systems; professor.