Дагаев Александр Владимирович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: adagaev@list.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371980.

Бойченко Михаил Михайлович
E-mail: m.boichenko@tti.sfedu.ru.
Тел.: 88634371980.

Бородянский Юрий Михайлович
E-mail: borodyansky@yandex.ru.
Тел.: 88634371787.
Кафедра системного анализа и телекоммуникаций; доцент.

Dagaev Aleksander Vladimirovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: adagaev@list.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 88634371980.

Boichenko Mixail Mixailovich
E-mail: m.boichenko@tti.sfedu.ru.
Phone: 88634371980.

Borodyanskiy Juriy Mixaylovich
E-mail: E-mail: borodyansky@yandex.ru.
Phone: 88634371787.
The Department of System Analysis and Telecommunications; associate professor.

УДК 519.1

Р.А. Кочкаров, И.Х. Утакаева

АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАТРАВКАМИ

Рассматриваются задачи распознавания различных предфрактальных графов. Произведена математическая постановка, разработаны эффективные алгоритмы распознавания исследуемых предфрактальных графов.

Граф; алгоритм; распознавание.

R.A. Kochkarov, I.H. Utakaeva

ALGORITHMS OF RECOGNITION OF PREDFRACTAL GRAPHS WITH VARIOUS PRIMING

Problems of recognition of various predfractal graphs are considered. Mathematical statement is made, effective algorithms of recognition of investigated predfractal graphs are developed.

Graph; algorithm; pattern recognition.

Распознавание образов – едва ли не самая распространенная задача, которую человеку приходится решать практически ежесекундно. Для этого человек использует огромные ресурсы своего мозга, включая одновременно около 10 млрд нейронов. Именно это дает возможность людям мгновенно узнавать друг друга, читать тексты, водить автомобиль. Задача распознавания объектов и явлений является актуальной задачей искусственного интеллекта и многих задач в военной области. На промышленных предприятиях методы распознавания нашли применение при построении систем технической диагностики оборудования, разработке «интеллектуальных» роботов, в автоматизированных системах управления предприятиями. В сельском хозяйстве системы распознавания находят все большее распространение не только в процедурах технической диагностики техники, но и при создании современного технологического оборудования. Методы и алгоритмы распознавания все в большей степени становятся неотъемлемым элементом медицинской и технической диагностики, метеорологического прогноза и геологической разведки, локационных систем наблюдения, систем ввода текстовой, графической и речевой информации в ЭВМ [1].

Распознавание представляет собой задачу преобразования входной информации, в качестве которой уместно рассматривать некоторые параметры, признаки распознаваемых образов, в выходную, представляющую собой заключение о том, к какому классу относится распознаваемый образ, что позволяет формализовать постановку проблемы. Постановка проблемы распознавания позволяет определить последовательность задач, возникающих при разработке системы распознавания, предложить их формулировки и возможные методы решения. Чтобы в полном объеме оценить все значение этой проблемы, достаточно сказать, что создание искусственного интеллекта – это построение распознающих систем, приближающихся по своим возможностям к возможностям человека в решении задач распознавания [1].

Математической моделью многих задач распознавания является задача распознавания предфрактального графа [2].

Термином «затравка» условимся называть какой-либо связный n-вершинный граф $H=(W,Q)$, с непомеченными, т.е. ненумерованными вершинами $u \in W$. В качестве обобщения известной операции «расщепления вершины», определим операцию «замещения вершины затравкой» (ЗВЗ). Суть операции ЗВЗ состоит в замещении на каждом шаге каждой вершины $v_k \, (k=1..n) \in V$ графа $G=(V,E)$ n-вершинной затравкой H, при этом для каждого ребра, инцидентного с v_k, указанная вершина заменяется на некоторую вершину u из W.

Определим поэтапный процесс выполнения ЗВЗ. На этапе $s=1$ в данной затравке $H=(W,Q)$, нумеруем вершины и ребра, полученный граф обозначим через $G_1=(V_1,E_1)$.

Пусть выполнены этапы $s=1,2,...,l$, и по завершению этапа l получен граф $G_l=(V_l,E_l)$, который называем *предфрактальным* (если $l \to \infty$, то речь будем вести о фрактальном графе).

Пусть представлен в явном виде некоторый граф, обладающий признаками предфрактального графа. Задача распознавания предфрактального графа заключаются в ответе на вопросы:

1) является ли данный граф предфрактальным с определенной затравкой;
2) можно ли построить эффективный алгоритм, который гарантированно построит процесс порождения предфрактального графа с определенной затравкой.

В дальнейшем будем использовать некоторые необходимые признаки предфрактальности графа $G=(V,E)$:

a) для мощности множества вершин $|V|=N$ существует непустое множество пар n, L таких, что $N=N(n,L)$;

b) для мощности множества ребер $|E|$ существует хотя бы одна пара n, L, удовлетворяющая равенству $|E_L|=q(n,L)$;

c) множество ребер ранга L состоит из объединения множеств ребер затравок, появившихся в результате того, что каждая вершина ранга $L-1$ графа была замещена затравкой.

В данной работе исследуются следующие задачи:

1. Пусть представлен в явном виде некоторый граф $G=(V,E)$, обладающий всеми необходимыми (но не являющимися достаточными) признаками предфрактального графа:

a) для мощности множества вершин $|V|=N$ существует пара n, L таких, что $N=n^L$;

b) для мощности множества ребер $|E|$ существует пара n, L, удовлетворяющая равенству $|\mathring{A}_L|=\dfrac{n(n-2)}{2}\,\dfrac{n^L-1}{n-1}$;

c) множество вершин состоит из двух подмножеств V_1 и V_2, где $V_1(V_2)$ – множество вершин $v\in V$ степени $s=n-1$ (степени $s=n-2$).

Излагается ответ на поставленный вопрос из области теории распознавания: является ли данный граф $G=(V,E)$ предфрактальным с непересекающимися «старыми» ребрами [3], образованным регулярной n-вершинной затравкой степени $s=n-2$, с помощью представленного ниже алгоритма.

Описанию алгоритма предпошлем лемму.

Лемма 1. *Пусть в предфрактальном графе $G=(V,E)$ две вершины v_1 и v_2 принадлежат одной затравке $H=(W,Q)$ ($v_1,v_2\in W$) и имеют смежность с некоторой вершиной $v\in V$, тогда v также принадлежит этой затравке H.*

Доказательство леммы осуществляется рассуждением от противного:

Действительно, существование в предфрактальном графе $G=(V,E)$ двух вершин v_1 и v_2, принадлежащих одной затравке $H=(W,Q)$ ($v_1,v_2\in W$) и имеющих смежность с некоторой вершиной $v\in V$ не своей затравки, означает, что в траектории предфрактального графа $G=(V,E)$ некоторый граф $G_l=(V_l,E_l)$ содержит кратные ребра, т.е. является мультиграфом, что противоречит определению графа. Тогда вершина $v\in V$ также принадлежит этой затравке H.

Алгоритм α_1

Описание процедуры β. Во множестве V_2 выделяется очередная неотмеченная вершина v_1^*, т.е. вершина, которая не принадлежит какой-либо уже выделенной затравке. Вершина $v_1^* \in V_2$ имеет степень $n-2$, т.е. смежна с $n-2$ новыми вершинами своей затравки $H=(W,Q)$, которые обозначаются через v_k^*, где $k=\overline{2,n-1}$ и окрашиваются. В результате имеем $n-1$ выделенных вершин n-вершинной затравки, т.е. непомеченной осталась всего одна вершина. Рассмотрим теперь вершины $v \in V$, смежные с выделенными v_k^*, $k=\overline{1,n-1}$, но неокрашенные, и выделим среди них вершину v_n, которая будет иметь смежность с $n-2$ из уже окрашенных $n-1$ вершин. Согласно лемме 1, вершина v_n также будет принадлежать затравке $H=(W,Q)$. Через W' обозначаем множество всех вершин, отмеченных процедурой β. Если мощность $|W'|=n$, то выделяем и окрашиваем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины данного множества W'. Работа процедуры β завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер n-вершинный связный однородный граф степени $s=n-2$. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β, завершается результативно и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным и алгоритм α_1 прекращает свою работу.

Опишем вычислительную схему первого этапа в случае, когда на его вход представлен исходный граф $G=(V,E)$.

Этап $\rho=1$ начинает свою работу с проверки выполнения равенства $|V|=n^L$. Если это равенство не выполняется, то алгоритм α_1 заканчивает работу с определенным результатом: «представленный граф $G=(V,E)$ не является предфрактальным с непересекающимися «старыми» ребрами, образованным регулярной n-вершинной затравкой степени $s=n-2$.

В случае выполнения этого равенства, в графе G выделяется множество V_1, состоящее из вершин степени $s=n-1$, и V_2, состоящее из вершин степени $s=n-2$. Если разность $V\setminus(V_1 \cup V_2)\neq\theta$, то алгоритм заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, V_1 и V_2 образуют разбиение множества V, и дальнейшая работа этапа $\rho=1$ состоит из m_0 шагов, где m_0 – число таких затравок, каждая из которых состоит из новых ребер.

Результатом каждого такого шага является выделенная в графе G очередная затравка. Процедуру выделения этой затравки обозначим через β.

Этап $\rho=1$ завершается, когда в данном графе $G=(V,E)$ все вершины множества V окажутся отмеченными.

По окончании первой части алгоритма α_1 осуществляем проверку, все ли вершины исходного графа G оказались отмеченными. Если да, то первый этап алгоритма α_1 заканчивает свою работу следующей процедурой. Исходный граф G обозначается через G_L^* и представляется в качестве первого члена последовательности $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$. Каждая выделенная затравка графа G стягивается в одну вершину. Полученный в результате такого стягивания граф обозначается через G_{L-1}^*. Далее, по отношению к нему реализуем очередной этап алгоритма.

Последовательное применение алгоритма к своему предыдущему результату порождает последовательность графов $G_l = (V_l, E_l)$, $l \equiv \overline{1, L}$, которая в случае успешной работы каждого применения алгоритма представляет собой траекторию, записанную в обратном порядке $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$.

Принципиальная распознаваемость предфрактального графа $G = (V, E)$ вытекает из конструктивного описания алгоритма. Естественный вопрос, возникающий после результативного процесса распознавания, состоит в следующем: если полученную последовательность $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$ записать в обратном порядке, то имеет ли место совпадение этой записи с траекторией, которая нам не известна (иначе не стоял бы вопрос распознавания)? Ответ на этот вопрос можно считать положительным в том случае, когда при построении этой последовательности никогда не возникала альтернативность при выделении каждой затравки. Отсутствие альтернативности в указанном смысле будем называть термином «однозначность результатов работы» данного алгоритма распознавания.

Рассмотрим вопрос о вычислительной сложности алгоритма α_1 и произведем оценку трудоемкости алгоритма $\tau(\alpha_1)$. В процессе реализации этапов алгоритма осуществляются следующие операции: определение степени вершины, выявление окрестности радиуса 1 для этой вершины, просмотр всех пар вершин графа на предмет смежности, выделение и окрашивание ребер. Поскольку эти операции выполняются в пределах одной затравки, то верхняя оценка этапа не превосходит совокупного количества ребер, выделенных и отмеченных в процессе работы этапа. Отсюда, справедлива

Теорема 1. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ с регулярной затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $\deg w_i = n - 2$, $w_i \in W$ распознается алгоритмом α_1, если «старые» ребра не пересекаются, с вычислительной трудоемкостью алгоритма $\tau(\alpha_1) \le O(|E|L)$.*

2. Теперь рассмотрим случай, когда задан в явном виде некоторый граф $G = (V, E)$, обладающий следующими необходимыми признаками предфрактального графа:

а) для мощности множества вершин $|V| = N$ существует пара n, L такая, что

$$|V_L| = \begin{cases} n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}}, & при\ L - четном, \\ n^{\frac{L+1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}}, & при\ L - нечетном; \end{cases}$$

b) для мощности множества ребер $|E|$ существует пара n, L, удовлетворяющая равенству

$$|E_L| = \begin{cases} (q_1 + q_2 n)\dfrac{n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}} - 1}{n(n+1)-1}, \textit{при } L - \textit{четном}, \\ (q_1 + q_2 n)\dfrac{n^{\frac{L-1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}} - 1}{n(n+1)-1} + n^{\frac{L-1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}} q_1, \textit{при } L - \textit{нечетном}, \end{cases}$$

$$\textit{где } q_1 = \frac{n(n+1)}{2};\; q_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

c) множество вершин состоит из двух подмножеств V_1 и V_2, где $V_1(V_2)$ – множество вершин $v \in V$ степени $\deg v = n+1$ (степени $\deg v = n$).

Здесь излагается ответ на поставленный вопрос: является ли представленный граф $G = (V, E)$ предфрактальным графом с непересекающимися «старыми» ребрами, образованным двумя полными затравками $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$ и $\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$, где мощности вершин $|W_1| = n$, $|W_2| = n+1$. Процедура замещения вершины затравкой (ЗВЗ) [2] производится на нечетных номерах этапов L затравкой $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$ и затравкой $\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$ на четных номерах этапов.

Для распознавания предфрактального графа $G = (V, E)$ построен алгоритм α_2.

Алгоритм α_2

Процедуру выделения затравки $H_1 = (W_1, Q_1)$ ($H_2 = (W_2, Q_2)$) обозначим через β_1 (β_2). Исходя из принципа построения предфрактального графа, будем применять ту или иную процедуру: если длина траектории заданного предфрактального графа L – четная, то на последнем шаге было замещение затравкой $H_1 = (W_1, Q_1)$, поэтому на первом этапе следует воспользоваться процедурой β_1, в противном случае – процедурой β_2. На последующих этапах процедуры будут чередоваться.

Описание процедуры β_1 (выделение затравки $H_1 = (W_1, Q_1)$). Выделяем во множестве V очередную неотмеченную вершину $v_1 \in V$ [1,2]. Если $v_1^* \in V_2$, то $\deg v_1^* = n$, т.е. v_1^* смежна с $(n-1)$ новыми вершинами своей затравки. Рассмотрим вершины, смежные с выделенной v_k^*, $k = \overline{2, n+1}$, но неокрашенные, и выделим среди них те, которые будут иметь смежность между собой. По лемме 1, эти вершины также будут принадлежать затравке. В случае, когда $v_1^* \in V_1$, то $\deg v_1^* = n+1$, т.е. смежна с $(n-1)$ новыми вершинами своей затравки. Рассмотрим теперь вершины, смежные с выделенной v_k^*, $k = \overline{2, n+2}$, но неокрашенные, и выделим среди них те, которые будут иметь смежность между собой, согласно лемме 1, эти вершины также будет принадлежать затравке. Через W' обозначаем множество всех вершин, отмеченных процедурой β_1. Если мощность $|W'| = n$, то выделяем и окрашиваем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины данного множества W'. Работа процедуры β_1 завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер n-вершинный полный граф. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β_1, завершается результативно, и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным, и алгоритм α_1 прекращает свою работу.

Описание процедуры β_2 *(выделение затравки* $H_2=(W_2,Q_2)$*).* Выделяем во множестве V очередную неотмеченную вершину $v_1 \in V$. В случае, когда $v_1^* \in V_2$, то $\deg v_1^* = n$, т.е. v_1^* смежна с n новыми вершинами своей затравки, которые обозначаем через v_k^*, где $k=\overline{2,n+1}$ и окрашиваем. Если же $v_1^* \in V_1$, то $\deg v_1^* = n+1$, т.е. v_1^* смежна с n новыми вершинами своей затравки. Рассмотрим те вершины, которые смежны с выделенной v_k^*, $k=\overline{2,n+2}$, но неокрашены, и выделим среди них те, которые будут иметь смежность между собой. Согласно лемме 1, эти вершины также будет принадлежать этой затравке. Через W' обозначаем множество всех вершин, отмеченных процедурой β_2. Если мощность $|W'|=n+1$, то выделяем и окрашиваем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины данного множества W'. Работа процедуры β_2 завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер $(n+1)$-вершинный полный граф. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β_2, завершается результативно, и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным, и алгоритм α_1 прекращает свою работу.

Этап $\rho=1$ начинает свою работу с проверки выполнения равенства

$$|V_L| = \begin{cases} n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}}, & \text{\textit{при} } L - \text{\textit{четном}}, \\ n^{\frac{L+1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}}, & \text{\textit{при} } L - \text{\textit{нечетном}}. \end{cases}$$

Если равенство не выполняется, то алгоритм α_2 заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, в графе G выделяются множества V_1, состоящее из вершин степени $n+1$, и V_2, состоящее из вершин степени n. Если разность $V \setminus (V_1 \cup V_2) \neq \theta$, то алгоритм заканчивает работу с отрицательным результатом, в том смысле, что данный граф не является предфрактальным графом с непересекающимися «старыми» ребрами, образованным двумя полными затравками $\acute{I}_1=(W_1,Q_1)$ и $\acute{I}_2=(W_2,Q_2)$, где мощности вершин $|W_1|=n$, $|W_2|=n+1$, в котором процедура замещения вершины затравкой (ЗВЗ) [2] производится на нечетных этапах затравкой $\acute{I}_1=(W_1,Q_1)$, а на четных $\acute{I}_2=(W_2,Q_2)$. В противном случае, V_1 и V_2 образуют разбиение множества V, и дальнейшая работа этапа $\rho=1$ состоит из m_0 шагов, где m_0 – число таких затравок, каждая из которых состоит из новых ребер. Результатом каждого такого шага является выделенная в графе G очередная затравка.

В случае результативной работы каждого из $L-1$ этапов в качестве последнего члена последовательности получим n-вершинный полный граф. Этот результат означает получение положительного ответа на вопрос: является ли представленный граф предфрактальным графом с непересекающимися «старыми» ребрами, образованным двумя полными затравками Í $_1 = (W_1, Q_1)$ и Í $_2 = (W_2, Q_2)$, где мощности вершин $|W_1| = n$, $|W_2| = n+1$, где процедура замещения вершины затравкой (ЗВЗ) производится на нечетных этапах затравкой Í $_1 = (W_1, Q_1)$, а на четных Í $_2 = (W_2, Q_2)$.

Распознаваемость исследуемого предфрактального графа $G = (V, E)$ вытекает из конструктивного описания алгоритма. Если полученную последовательность $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$ записать в обратном порядке, то имеет ли место совпадение этой записи с траекторией? Ответ на этот вопрос можно считать положительным в том случае, когда при построении этой последовательности никогда не возникала альтернативность при выделении каждой затравки.

Рассмотрим вопрос о вычислительной сложности алгоритма α_2. В процессе реализации этапов алгоритма α_2 осуществляются следующие элементарные операции: определение степени вершины, выявление окрестности радиуса 1 для этой вершины, просмотр всех пар вершин графа на предмет смежности, выделение и окрашивание ребер. Поскольку все операции выполняются в пределах одной затравки, то верхняя оценка этапа не превосходит совокупного количества ребер, выделенных и отмеченных в процессе работы этапа. Отсюда справедлива

Теорема 2. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, образованный двумя полными чередующимися затравками $H_1 = (W_1, Q_1)$ и $H_2 = (W_2, Q_2)$, распознается алгоритмом α_2, если «старые» ребра не пересекаются с вычислительной трудоемкостью алгоритма $\tau(\alpha_2) \le O(|E|L)$.*

3. Пусть задан в явном виде некоторый граф $G = (V, E)$, обладающий необходимыми признаками предфрактального графа:

a) для мощности множества вершин $|V| = N$ существуют n, m, L такие, что

$$|V_L| = \begin{cases} m^{\frac{L+1}{2}} n^{\frac{L-1}{2}}, \text{ } \textit{при } L - \textit{нечетном}, \\ m^{\frac{L}{2}} n^{\frac{L}{2}}, \text{ } \textit{при } L - \textit{четном}; \end{cases}$$

b) для мощности множества ребер $|E|$ существуют n, m, L, удовлетворяющие равенству:

$$|E_L| = \begin{cases} \dfrac{m(m-1)}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{L-3}{2}} \left[\dfrac{n(n-1)}{2} m^{k+1} n^k + \dfrac{m(m-1)}{2} m^{k+1} n^{k+1} \right], & \textit{при } L - \textit{нечетном}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{L-2}{2}} \left[\dfrac{m(m-1)}{2} m^k n^k + \dfrac{n(n-1)}{2} m^{k+1} n^k \right], & \textit{при } L - \textit{четном}; \end{cases}$$

c) множество вершин состоит из двух подмножеств V_1 и V_2, где $V_1(V_2)$ – множество вершин $v \in V$ степени $\deg v = n+1$ (степени $\deg v = n$).

Представлен ответ на вопрос: является ли представленный граф $G = (V, E)$ предфрактальным графом $G = (V, E)$ с двумя полными затравками $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$ и $\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$, где мощности множеств вершин $|W_1| = m$ и $|W_2| = n$, в случае, когда смежность старых ребер не нарушается. Причем процедура ЗВЗ произведена на нечетных этапах затравкой $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$, и $\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$ на четных.

Для распознавания описанного предфрактального графа $G = (V, E)$ разработан алгоритм α_3.

Алгоритм α_3

Процедура выделения затравки $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$ и $\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$ обозначается γ_1 (γ_2) в случае, если длина траектории $G = (V, E)$ L – нечетная (четная), то на последнем шаге было замещение затравкой $\acute{I}_1 = (W_1, Q_1)$ ($\acute{I}_2 = (W_2, Q_2)$). Следовательно, для предфрактального графа нечетного ранга L следует воспользоваться процедурой γ_1, в противном случае – процедурой γ_2. На последующих этапах процедуры будут чередоваться.

Описание процедуры γ_1 (выделение затравки $H_1 = (W_1, Q_1)$). Во множестве V выделяется очередная неотмеченная вершина ν. Так как всякая «новая» затравка $H_1 = (W_1, Q_1)$ имеет $m-1$ вершину степени $m-1$ и одну вершину, степень которой больше, чем $m-1$, то $\forall \nu \in \mathrm{V}$ возможны два случая:

1. $\deg v = m-1$;
2. $\deg v > m-1$.

В первом случае исходная вершина и смежные с ней $m-1$ вершин объединяют во множество W_1. Далее окрашиваются все вершины W_1, а также $\frac{m(m-1)}{2}$ ребер, концы которых принадлежат W_1.

Во втором случае рассматриваемая вершина ν имеет инцидентность не только с $(\mathrm{m}-1)$ «новым» ребром, но и со «старыми» ребрами. Среди множества вершин, смежных с ν, выделяются $m-1$ вершин, степень которых $m-1$. Исходную вершину ν и выделенные $m-1$ вершин степени $m-1$ объединяют во множество W_1. После чего окрашиваются вершины W_1, а также $\frac{m(m-1)}{2}$ ребер, концы которых представляют собой вершины множества W_1.

Работа процедуры γ_1 завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер m-вершинный полный граф. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру γ_1, завершается результативно, и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным, и алгоритм прекращает свою работу с отрицательным ответом на поставленный вопрос распознавания: «Является ли представленный граф $G=(V,E)$ предфрактальным графом $G=(V,E)$ с двумя полными затравками $Í_{1}=(W_1,Q_1)$ и $Í_{2}=(W_2,Q_2)$, где мощности множеств вершин $|W_1|=m$ и $|W_2|=n$, в случае, когда смежность старых ребер не нарушается, где процедура ЗВЗ произведена на нечетных номерах этапов затравкой $Í_{1}=(W_1,Q_1)$ и затравкой $Í_{2}=(W_2,Q_2)$ на четных?»

Описание процедуры γ_2 (выделение затравки $H_2=(W_2,Q_2)$). Во множестве V выделяется очередная неотмеченная вершина v. Так как всякая «новая» затравка $H_2=(W_2,Q_2)$ имеет $n-1$ вершину степени $n-1$ и одну вершину, степень которой больше $n-1$, то $\forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$ возможны два случая:

1. $\deg v = n-1$;
2. $\deg v > n-1$.

В первом случае исходная вершина и смежные с ней $n-1$ вершин объединяются во множество W_2. Далее окрашиваются вершины W_2, а также $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, концы которых представляют собой вершины W_2.

Во втором случае, вершина v имеет инцидентность не только с $n-1$ «новым» ребром, но и со «старыми» ребрами. Среди вершин, смежных с v, выделяют $n-1$ вершин со степенью $n-1$. Исходную вершину v и выделенные $n-1$ вершины степени $n-1$ объединяют во множество W_2. Далее окрашиваются вершины W_2, а также $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер, концы которых представляют собой вершины множества W_2.

Работа процедуры γ_2 завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер n-вершинный полный граф. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру γ_2, завершается результативно, и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным, и алгоритм прекращает свою работу с отрицательным ответом на поставленный вопрос распознавания: «Является ли представленный граф $G=(V,E)$ предфрактальным графом $G=(V,E)$ с двумя полными затравками $Í_{1}=(W_1,Q_1)$ и $Í_{2}=(W_2,Q_2)$, где мощности множеств вершин $|W_1|=m$ и $|W_2|=n$, в случае, когда смежность старых ребер не нарушается, где процедура ЗВЗ произведена на нечетных этапах затравкой $Í_{1}=(W_1,Q_1)$, и $Í_{2}=(W_2,Q_2)$ на четных?»

По окончании первой части описанных выше алгоритмов, осуществляется проверка: все ли вершины исходного графа оказались отмеченными. Если да, то первый этап алгоритмов заканчивает свою работу следующей процедурой. Исходный граф обозначается через G_L^* и представляется в качестве первого члена последовательности $G_L^*, G_{L-1}^*, \ldots, G_1^*$. Каждая выделенная затравка стягивается в вершину. Полученный в результате стягивания граф обозначается через G_{L-1}^*. Далее, по отношению к нему, реализуется очередной этап алгоритма.

В случае результативной работы каждого из $L-1$ этапов в качестве последнего члена последовательности получим m-вершинный полный граф. Этот результат означает получение положительного ответа на вопрос: является ли представленный граф предфрактальным графом с непересекающимися «старыми» ребрами, образованным двумя полными затравками Í$_1 = (W_1, Q_1)$ и Í$_2 = (W_2, Q_2)$, где мощности вершин $|W_1| = m$, $|W_2| = n$, где процедура ЗВЗ производится на нечетных этапах затравкой Í$_1 = (W_1, Q_1)$, а на четных Í$_2 = (W_2, Q_2)$.

Принципиальная распознаваемость исследуемого предфрактального графа $G = (V, E)$ вытекает из конструктивного описания алгоритма α_3 и однозначности результатов его работы.

Рассмотрим вопрос о вычислительной сложности алгоритма α_3. В процессе реализации этапов алгоритма осуществляются следующие операции: определение степени вершины, выявление окрестности радиуса 1 для этой вершины, просмотр всех пар вершин графа на предмет смежности, выделение и окрашивание ребер. Так как эти операции выполняются в пределах одной затравки, то верхняя оценка этапа не превосходит совокупного количества ребер, выделенных и отмеченных в процессе работы этапа. Отсюда, справедлива

Теорема 3. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ с двумя полными затравками распознается алгоритмом α_3, где смежность старых ребер не нарушается с вычислительной трудоемкостью алгоритма $\tau(\alpha_3) \le O(|E|L)$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Методы распознавания. – М., 2004.
2. *Емеличев В.А. и др.* Лекции по теории графов. – М., 1990.
3. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов: Алгоритмический подход. – Нижний Архыз, 1998.
4. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. – М., 2004.
5. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. – М., 2005.
6. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М., 2002.

Кочкаров Расул Ахматович
Финансовая академия при правительстве РФ.
E-mail: Rasul_Kochkarov@mail.ru
125993, Москва, Ленинградский просп., 49.
Тел.: 88782202387.
Кафедра математического моделирования и динамических процессов; докторант.

Утакаева Ирина Хайрлыевна
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия.
E-mail: utakaev@yandex.ru
125993, Москва, Ленинградский просп., 49.
Тел.: 88782202387.
Кафедра математики; ассистент.

Kochkarov Rasul Ahmatovich
Financial academy of Russian Federation.
E-mail: Rasul_Kochkarov@mail.ru
125993, Moscow, Leningrad Ave., 49.
Phone: 88782202387.
The Department of mathematical modeling and dynamic processes; candidate for a doctor’s.

Utakaeva Irina Hairlyevna
Karachai-Cherkess State technological academy.
E-mail: utakaev@yandex.ru
49, Leningrad Ave., Moscow, 125993, Russia.
Phone: 88782202387.
The Department of mathematic; assistant.

УДК 621.311.1.016.312

Б.А. Гусев, Ю.В. Пахомов

ОБ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Анализ и сокращение потерь трехфазной электроэнергии.
Электроэнергия; анализ и сокращение потерь трехфазной электроэнергии.

B.A. Gusev, J.V. Pahomov

ABOUT QUALITY OF ELECTRICAL ENERGY

Analysis and shorten of waste three-phase electrical energy.
Electrical energy; analysis and shorten of waste three-phase electrical energy.

В однофазной системе полная мощность W определяется с учетом действующего значения тока I, протекающего через нагрузку, и действующего значения напряжения U на её клеммах по

$$W=UI=(P^2+Q^2)^{1/2}, \quad (1)$$

где P и Q – активная и реактивная мощности нагрузки, при этом предполагается, что U и I не содержат высших гармоник.

Определение полной W для трехфазной нагрузки, при симметричной системе U, допустимо оценить по алгебраической сумме фазных мощностей W_A, W_B и W_C по

$$W_{алг}=W_A+W_B+W_C=U(I_A+I_B+I_C). \quad (2)$$

На практике для оценки потребления энергии применяется геометрическая полная мощность $W_{геом}$, определяемая выражением

$$W^2_{геом}=P^2+Q^2=(P_A+P_B+P_C)^2+(Q_A+Q_B+Q_C). \quad (3)$$

Действительная же полная мощность $W_д$

$$W^2_д=(U^2_A+U^2_B+U^2_C)(I^2_A+I^2_B+I^2_C). \quad (4)$$

Неоднозначность определения W в трехфазной искажающей системе, в частности в четырехпроводной системе, в которой система U несимметрична, а U_A, U_B и U_C несинусоидальны, потери W вызываются поперечной проводимостью G (проводимостью между проводами), выражаемой уравнением [1]

$$\Delta P_U=(G/T)\times\int_0^T (u_A+u_B+u_C)\,dt. \quad (5)$$