БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пьявченко Т.А., Карась В.М.* Алгоритмы цифрового управления процессом горения в топке парогенератора // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – №2. – С. 148-154.
2. *Плетнев Г.П.* Автоматизированные системы управления объектоами тепловых электростанций: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МЭИ, 1995. – 352 с.
3. *Пьявченко Т.А.* Расчет параметров ПИД-закона управления для объектов с транспортным запаздыванием // Известия ТРТУ. Тематический выпуск "Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении". – 2006. – №5 (60). – С. 83-88.
4. *Чиликин М.Г., Сандлер А.С.* Общий курс электропривода: Учебник для вузов. – 6-е изд., доп. и перераб. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.

Пьявченко Тамила Алексеевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: pta@tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371689.
Кафедра систем автоматического управления; профессор.

Карась Вячеслав Михайлович
E-mail: Alkey777@mail.com.
Кафедра систем автоматического управления; аспирант.

Pyavchenko Tamila Alekseevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: pta@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 88634371689.
The Department of Automatic Control Systems; professor.

Karas' Vyacheslav Mixaylovich
E-mail: Alkey777@mail.com.
The Department of Automatic Control Systems; postgraduate student.

УДК 501.462

Е.А. Плаксиенко

ЭФФЕКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБОРУДОВАНИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

Построено эффективное стабилизирующее управление нелинейным оборудованием электростанций на основе нелинейных моделей, представленных в квазилинейной форме. Управление получено путём решения полиномиального уравнения с применением системы алгебраических уравнений. Приведен пример.

Объект; управление; модель; нелинейность.

E.A. Plaksienko

EFFECTIVE CONTROL OF ELECTRICAL POWER-STATIONS EQUIPMENT

On base of nonlinear model, represented in the semi-linear form, is found effective control stability for equipment of electrical power-stations. Control is found by solved of polynomial equation with application system of algebraic equation. Example is given.

Plant; control; model; nonlinear.

Введение. Для производства и распределения электрической энергии на электростанциях очень часто используются различное оборудование. Управление им осложняется тем, что соответствующие математические модели являются нелинейными. Поэтому применение традиционного метода линеаризации и способов управления линейными объектами приводит к неэффективному управлению оборудованием электростанций. Качественные системы управления нелинейными объектами можно построить, если предварительно математическую модель объекта управления представить в квазилинейной форме. В частности, это позволяет для определения нелинейных управлений применять аналитический метод, в котором используется решение полиномиальных уравнений, рассмотренное в работе [2]. К указанному оборудованию электростанций с нелинейной моделью относятся, в частности, электрические генераторы, приводимые в движение газовой или паровой турбиной. Такие турбогенераторы являются весьма эффективными, так как обладают высокими эксплуатационными свойствами [1]. Однако для их нормальной работы требуется высококачественная система управления. Ниже приводится пример построения управления для турбогенератора указанным методом.

Прежде чем переходить к определению этого управления, рассмотрим постановку задачи управления нелинейными объектами в квазилинейной форме.

Постановка задачи. Если нелинейности некоторой системы являются дифференцируемыми, то при некоторых достаточно слабых условиях её уравнения можно представить в квазилинейной форме следующего вида:

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u\,, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – доступный измерению вектор состояния системы; $A(x) = [a_{ij}(x)]$ и $b(x) = [b_1(x)\, b_2(x) \dots b_n(x)]^T$ – функциональные непрерывная $n \times n$-матрица и n-вектор; T – символ операции транспонирования. Отметим, что выражение (1) является не приближённым, а точным представлением соответствующей нелинейной системы уравнений.

Предположим также, что нелинейный объект (1) является полностью управляемым, т.е. выполняется условие

$$\det[b(x) \;\; A(x)b(x) \dots \;\; A^{n-1}(x)b(x)] \neq 0 \tag{2}$$

в некоторой области $\Omega \in R^n$, причем эта область включает начало координат $x = 0$. Поскольку вектор x измеряется, искомое нелинейное управление можно определить выражением $u = -k^T(x)x$, где $k_i(x)$ – некоторые нелинейные функции переменных состояния объекта (1).

Задача заключается в определении функций $k_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ так, чтобы свободные движения замкнутой системы были затухающими, т.е.

$$\|x(x_0, t)\| \leq C_0(x_0)\exp(-\alpha t)\,, \quad \Omega_0 \in \Omega \in R^n\,. \tag{3}$$

Здесь $x(t, x_0)$ – решение системы (1); причем $x(0, x_0) = x_0$, $x_0 \in \Omega_0$; $C_0(x_0)$ и α – положительные постоянные.

В этом случае, очевидно, обеспечивается асимптотическая устойчивость положения равновесия $x = 0$ объекта управления (1) или, что то же самое, замкнутой системы в некоторой области притяжения Ω_0.

Решение задачи. Подставляя управление $u=-k^T(x)x$ в (1), получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}=D(x)x\,, \tag{4}$$

где

$$D(x)=A(x)-b(x)k^T(x)\,. \tag{5}$$

Как видно, замкнутая система описывается уравнением, отличающимся от уравнений систем с постоянными параметрами только тем, что матрица системы зависит от переменных состояния. Хотя системная матрица $D(x)$ является функциональной, она, как и всякая квадратная матрица, имеет характеристический полином $D(p,x)=\det(p-D(x))$, коэффициенты которого также являются, в общем случае, функциями вектора x. Этот полином имеет n корней $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$.

Если все корни характеристического полинома $D(p,x)$ матрицы $D(x)$ системы (4) имеют строго отрицательные вещественные части, то эта система называется гурвицевой.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (4) матрица $D(x)$ является непрерывной, а коэффициенты её характеристического полинома – постоянными числами, и этот полином удовлетворяет критерию Гурвица. Тогда соответствующая система, очевидно, является гурвицевой.

Поскольку матрица $D(x)$ является непрерывной матрицей, то при достаточно малом $\|x\|$ поведение нелинейной системы (4) будет близко к поведению линейной системы $\dot{x}=D(0)x$. Это утверждение следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и условия постоянства коэффициентов характеристического полинома матрицы $D(x)$ при всех x. Действительно, в силу непрерывности матрица $D(x)$ стремится при $\|x\|\to 0$ к постоянной матрице $D_0=D(0)$, которая является устойчивой. Следовательно, положение равновесия $x=0$ системы $\dot{x}=D(x)x$ является устойчивым в малом.

Это позволяет путём решения уравнения Ляпунова

$$D^T(0)P+PD(0)=-C\,, \tag{6}$$

где C – положительно определённая матрица, найти симметрическую положительно-определенную матрицу P, и построить положительно-определённую функцию Ляпунова $V(x)=x^TPx>0$. Производная по времени этой функции на траекториях линейной системы $\dot{x}=D(0)x$, естественно, является отрицательно определенной функцией при всех x. Однако в силу непрерывности матрицы $D(x)$ эта функция $V(x)=x^TPx$ будет иметь отрицательно-определенную производную по времени и на траекториях нелинейной системы (4) в некоторой области Ω. Это означает, что существует некоторая область $\Omega_0\in\Omega$ такая, что если вектор начальных условий $x_0\in\Omega_0$, то соответствующее решение системы (4) $x(t,x_0)\in\Omega$.

Другими словами, если $x_0\in\Omega_0$ и $t\geq 0$, то в указанных условиях будет выполняться неравенство (3), где $\alpha=-\varepsilon+\min|\operatorname{Re}p_i|$, $i=\overline{1,n}$. Здесь p_i – корни характеристического полинома матрицы $D(x)$ (5), а $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. Указанная область $\Omega_0 \in \Omega$ будет, очевидно, областью притяжения положения равновесия $x = 0$ системы (4).

Таким образом, для решения поставленной задачи построения нелинейного управления объектом (1) необходимо найти такие функции $k_i(x)$, при которых системная матрица $D(x)$ является непрерывной, имеет характеристический полином с постоянными коэффициентами, а корни этого полинома имеют отрицательные вещественные части.

Перейдём к выводу расчётных соотношений, позволяющих найти вектор $k(x)$ из выражения (5), удовлетворяющий указанным требованиям.

Характеристический полином $D(p,x) = \det(p - D(x))$ матрицы $D(x)$ (5), можно определить следующим выражением:

$$D(p,x) = A(p,x) + k^T(x)\mathrm{adj}(pE - A(x))b(x)$$

или

$$D(p,x) - A(p,x) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x) B_i(p,x)\,, \tag{7}$$

где

$$A(p,\,x) = \det(pE - A(x)) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x,)\,p^i\,, \tag{8}$$

$$B_i(p,\,x) = c_i \mathrm{adj}(pE - A(x))b(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \nu_{ij}(x)\,p^j\,. \tag{9}$$

Здесь $c_1 = [1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]$, $c_2 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]$, $\ldots$, $c_n = [0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1]$ – соответствующие строки единичной матрицы E.

В соответствии с изложенным выше полином $D(p,x)$ в левой части выражения (7) должен иметь постоянные коэффициенты и удовлетворять критерию Гурвица. Поэтому его можно считать заданным. Тогда это выражение фактически является полиномиальным уравнением относительно коэффициентов $k_i(x)$. Решение этих уравнений, как показано в работе [2], сводится к решению некоторой системы алгебраических уравнений. Эта система записывается следующим образом.

Пусть полином

$$D^*(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^*\,p^i \tag{10}$$

является желаемым полиномом матрицы $D(x)$ системы (4). Тогда, следуя [2], приведём подобные в левой и в правой частях уравнения (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной p. В результате получим систему алгебраических уравнений, которая в векторно-матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \nu_{10} & \nu_{20} & \cdots & \nu_{n0} \\ \nu_{11} & \nu_{21} & \cdots & \nu_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{1,n-1} & \nu_{2,n-1} & \cdots & \nu_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\gamma_i = \gamma_i(x) = \delta_i^* - \alpha_i(x)$, $i = \overline{0, n-1}$. В (11) аргументы нелинейных функций из (7), (8) и (9) опущены для сокращения записи.

Можно показать [2], что определитель матрицы системы (11) пропорционален определителю из условия управляемости (2) заданного объекта (1). Поэтому если это условие выполняется, то система алгебраических уравнений (11) всегда имеет единственное решение. Это решение определяет компоненты $k_i(x)$ искомого вектора $k(x)$, при котором решение системы (4) удовлетворяет условию (3) в некоторой области $\Omega \in R^n$.

Оценить эту область $\Omega \in R^n$ и область притяжения $\Omega_0 \in \Omega$ положения равновесия $x = 0$ синтезированной системы целесообразнее всего методом численного моделирования, так как аналитические методы (например, на основе приведенной выше функции Ляпунова $V(x) = x^T P x$ системы первого приближения) дают слишком грубые оценки области притяжения.

Изложенная методика определения стабилизирующего управления объектом (1) является, очевидно, полностью аналитической и может применяться для определения управления различными нелинейными объектами, уравнения которых представлены в квазилинейной форме (1). Покажем порядок её применения на примере электрического турбогенератора.

Пример. Найти управление, стабилизирующее частоту турбогенератора при постоянном напряжении возбуждения и при отсутствии насыщения в магнитных цепях. Уравнения турбогенератора в отклонениях от некоторого установившегося режима имеют следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2{,}5\sin x_1 + 4x_3,$$
$$\dot{x}_3 = -0{,}1x_2^3 - \varphi_3(x_3) + u, \tag{12}$$

где x_1 – угол поворота ротора турбогенератора относительно синхронной оси вращения, x_2 – скольжение, x_3 – отклонение механической мощности турбины, нелинейность $\varphi_3(x_3) = x_3 / \sqrt{x_3^2 + 1}$.

Нелинейности турбогенератора являются дифференцируемыми, поэтому систему (12) можно представить в квазилинейной форме (1). При этом матрица $A(x)$ и вектор $b(x)$ имеют вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega(x_1) & 0 & 4 \\ 0 & -0{,}1x_2^2 & -a_{33}(x_3) \end{bmatrix},\quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $\omega(x_1) = -2{,}5\,(\sin x_1)/x_1$, $a_{33}(x_3) = 1/\sqrt{x_3^2 + 1}$.

Определитель матрицы управляемости в данном случае равен -16, т.е. условие (2) выполняется, поэтому существует решение задачи построения управления, стабилизирующего частоту турбогенератора.

Определяя по формулам (8) и (9) полиномы объекта управления, получим: $A(p,x) = p^3 + a_{33}(x_3)p^2 + \alpha_1(x)p + \alpha_0(x)$, $B_1(p) = 4$, $B_3(p,x) = p^2 - \omega(x_1)$ и $B_2(p) = 4p$, где $\alpha_0(x) = 2,5\ (\sin x_1)/x_1\sqrt{x_3^2+1}$, $\alpha_1(x) = 0,4x_2^2 + 2,5(\sin x_1)/x_1$.

Выберем в качестве желаемого полином $D^*(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 4$, удовлетворяющий критерию Гурвица. Система (11) в данном случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -\omega(x_1) \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\alpha_0 \\ 3-\alpha_1 \\ 3-a_{33} \end{bmatrix}.$$

Её решение: $k_1(x) = 0,25(4 + 3\omega(x_1))$, $k_2(x) = 0,25(3 + \omega(x_1)) - 0,1x_2^2$, $k_3(x) = 3 - a_{33}(x_3)$. Следовательно, искомое управление для заданной системы (12) определяется выражением:

$$u(x) = -x_1 + 1,875\sin x_1 - 0,75x_2 + 0,625x_2(\sin x_1)/x_1 +$$
$$+0,1x_2^3 - 3x_3 + x_3/\sqrt{x_3^2+1}\ .$$

Подставляя найденные выражения для матрицы $A(x)$ и функций $k_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ в равенство (5), найдем матрицу $D(x)$. Далее, определяя по формуле (7) её характеристический полином, нетрудно убедиться, что он совпадает с выбранным выше полиномом $D^*(p)$, т.е. имеет постоянные коэффициенты и удовлетворяет критерию Гурвица.

Следовательно, синтезированная система является гурвицевой, и в соответствии с изложенным выше её положение равновесия асимптотически устойчиво в большом. Область притяжения $\Omega_0 \in \Omega$ положения равновесия синтезированной системы может быть найдена, как отмечалось выше, методом компьютерного моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лупкин В.М.* Анализ режимов синхронной машины методами Ляпунова. – Л.: Энергоатомиздат, 1991.
2. *Плаксиенко Е.А.* Решение полиномиальных уравнений. Математические методы в технике и технологиях ММТТ-22. Сб. трудов XXII Международной научной конференции. Т. 2. – Псков: Изд-во ПГТИ, 2009. – С. 136–138.

Плаксиенко Елена Алексеевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге
E-mail: pumkad@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634362582.

Plaksienko Elena Alekseevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: pumkad@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: 88634362582.