8. *Смейл С.* Современные проблемы хаоса и нелинейности / С. Смейл. – Ижевк: ИКИ, 2004.
9. *Магницкий Н.А.* Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
10. *Леонов Г.А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004.
11. *Зубов И.В.* Методы анализа динамики управляемых систем / И.В. Зубов. – М.: Физматлит, 2003.
12. *Неймарк Ю.И.* Стохастические и хаотические колебания / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. – М.: Наука, 1987.

Колесников Анатолий Аркадьевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634360707.
Кафедра синергетики и процессов управления; заведующий кафедрой; профессор.

Капустина Анастасия Сергеевна
E-mail: nastena666@mail.ru.
Кафедра синергетики и процессов управления; аспирант.

Kolesnikov Anatoly Arkadevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634360707.
The Department of Synergetics and Control Processes; Head the Department; Professor.

Kapustina Anastasia Sergeevna
E-mail: nastena666@mail.ru.
The Department of Synergetics and Control Processes; Postgraduate Student.

УДК 621.3.013.62

С.С. Зельманов

РЕЗОНАНС В ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Классическое определение резонанса, предложенное Н.Д. Папалекси в докладе «Эволюция понятия резонанса», не предполагает учета потерь в резонаторе, а, напротив, обращает эти потери в ноль и приводит колебания в резонаторе к нормальным колебаниям. Частота нормальных колебаний считается резонансной. Однако в RC-системах потери играют значительную конструктивную роль. В то же время в таких системах может иметь место как угодно острый резонанс. Поэтому объяснить явление резонанса в таких системах с позиций его классического определения не представляется возможным. Для устранения этого несоответствия предлагается спектральный критерий резонанса, связанный с экстремумом спектра свободного процесса системы, являющегося суммой собственных процессов. На основе этого критерия предлагается определение явления резонанса, распространяющееся на более широкий класс линейных стационарных систем с любым числом степеней свободы и без каких-либо ограничений на величину потерь в них.

Резонанс; нормальные колебания; свободный процесс; собственный процесс; экстремум огибающей модуля спектра.

S.S. Zelmanov

RESONANCE IN THE LINEAR STATIONARY SYSTEM WITH EXPONENTIAL OWN PROCESSES

The classic resonance definition offered by N.D. Papaleksy in his report " The evolution of the resonance" doesn't suppose the loss account in the resonator but just the opposite nullifies these losses and leads the oscillations in the resonator to normal oscillations.

The frequency of the normal oscillations is considered as resonator. However the losses in R.C-systems play the significant constructional role. At the same time such systems have high-peak resonance. That's is why to explain the resonance phenomenon in such system from the point of view it's classic definition is not possible. In order to eliminate this discrepancy it is suggested the spectral criterion of the resonance which is connected with extremum of the free system process spectrum which is the sum of it's own process. On the base of this criterion it is suggest the definition of the resonance phenomenon which is spread to wider class of linear stationary system with any number of freedom degrees and without any restrictions on the loss value in them.

Resonance; normal oscillations; free process; own process extremum of the spectrum modulus round.

Введение. В теории колебаний в соответствии с критерием классического гармонического резонанса так определяется понятие резонанса в линейной системе с постоянными параметрами [1]:

"Резонанс – резкое возрастание амплитуд установившихся вынужденных колебаний, наступающее при приближении частоты р гармоничного внешнего воздействия к частоте ω_i одного из нормальных колебаний, свойственных данной колебательной системе".

Это определение предполагает принципиальную возможность существования резонанса в системе при условии, что в ней могут существовать нормальные колебания, имеющие место при устранении в ней потерь.

Это условие вполне выполнимо для одиночного резонатора, к которому адресована классическая теория резонанса. Однако существуют резонансные RC-системы, потери в которых играют существенную конструктивную роль, и пренебречь ими не представляется возможным, т.к. система при этом разрушается. В то же время, такие системы экстремально реагируют на гармонические воздействия определенных частот, обладают избирательностью, полосой пропускания, возможностью накапливать энергию процесса, т.е. обладают свойствами резонансных систем. Они широко используются при создании полосовых и режекторных фильтров, а также генераторов. На их основе могут быть построены системы с многими степенями свободы. Поэтому нам представляется весьма полезной постановка следующих вопросов:

1. Как применить классическую теорию резонанса к колебательной системе, в которой «нормальные» колебания не могут быть реализованы даже приближенно?

2. Как работает традиционная теория резонанса, созданная для одиночной колебательной системы, в системе со многими степенями свободы?

3. Какую роль в понимании «механизма» резонанса играют свободные и собственные процессы в сложных системах и в чем их отличие?

В работе [2] А.А. Харкевич совершенно справедливо отмечал, что «ощущается потребность в таком развитии теории, которая позволила бы, в общем виде, рассматривать системы со многим степенями свободы. Именно каждой степени свободы может соответствовать один резонанс (на частоте, в общем случае, не совпадающей с резонансной частотой данного контура, взятого отдельно)».

Попытки создания общей теории резонанса для более широкого класса линейных стационарных систем имели место.

Однако вместо того, чтобы расширять класс линейных стационарных систем в направлении учета потерь и многих степеней свободы, исследования были направлены на поиск универсального критерия резонанса для линейных стационарных и нестационарных фильтров с весьма незначительными потерями. В связи с этим приведем соображения А.С. Виницкого о невозможности обобщения явления резонанса на более широкий класс линейных систем, изложенные им в работе [3].

Он утверждает, что *«..резонанс наступает для синусоидальной э.д.с. при определенной ее частоте, равной частоте собственных колебаний контура (т.е. его свободных колебаний в отсутствие потерь)…и, таким образом, всем привычный классический резонанс представляет собой вырожденный случай резонанса, из рассмотрения которого даже трудно подметить общие свойства этого явления для более широкого класса систем и дать его обобщенное определение».*

Во-первых, речь опять идет об одиночном резонаторе без потерь.

У автора этого заключения могло быть и иное мнение, если бы речь шла только о стационарных линейных системах, на величину потерь в которых и на количество степеней свободы не накладывается никаких ограничений. Однако цель здесь была иная, и расширение класса линейных систем было направлено в сторону объединения стационарных и нестационарных линейных систем. Термин «вырожденный» применительно к «классическому» резонансу, как и трудности определения «общих свойств этого явления» подлежат осуждению. У классического резонанса в линейной стационарной системе действительно отсутствуют общие свойства с резонансом в нестационарных системах. Однако, как будет следовать из дальнейшего, обобщение его в рамках стационарных систем окажется все таки возможным.

Так теории классического резонанса было отказано в обобщении, хотя необходимость такого обобщения осталась актуальной и сегодня, поскольку общая теория резонанса для стационарных систем с потерями и произвольным числом степеней свободы отсутствует.

В связи с этим нам предстоит ответить на поставленные выше вопросы и по возможности попытаться решить задачу развития понятия классического резонанса применительно к более широкому классу линейных стационарных систем, на величину потерь в которых и на число степеней свободы не накладывается никаких ограничений.

2. Решение задачи. Рассмотрим линейную стационарную систему, дифференциальное уравнение которой с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{di}{dt} + a_n i = E(t)\cdot$$

В данной системе на величину потерь энергии не накладывается каких-либо ограничений. Если на вход системы с нулевыми начальными условиями подать одиночный δ-импульс, то после окончания его действия уравнение системы будет иметь вид:

$$\frac{d^n i_{\text{св}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_{\text{св}}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{di_{\text{св}}}{dt} + a_n i_{\text{св}} = 0\cdot \qquad (1)$$

Любое решение $i_{св}(t)$ уравнения (1) является свободным процессом системы. Итак, свободный процесс – это реакция линейной стационарной системы на входной δ-импульс.

Уравнению (1) соответствует характеристическое уравнение:

$$\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + a_2\gamma^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\gamma + a_n = 0,$$

где $n = 1, 2, 3 \ldots$.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения мы будем иметь различные решения этого уравнения и соответствующие им следующие виды свободных процессов:

$$\mathbf{i}_{св}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_1\mathbf{e}^{-\alpha_1 \mathbf{t}}; \tag{2}$$

$$\mathbf{i}_{св}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_1\mathbf{e}^{-\alpha_1 \mathbf{t}} + +\mathbf{C}_2\mathbf{e}^{-\alpha_2 \mathbf{t}} + \ldots + \mathbf{C}_n\mathbf{e}^{-\alpha_n \mathbf{t}}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{i}_{св}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{e}^{-\alpha_1 t} \ldots + \mathbf{C}_n\mathbf{t}^{n-1}\mathbf{e}^{-\alpha_1 \mathbf{t}}; \tag{4}$$

$$\mathrm{i}_{св}(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}}\left(\mathrm{C}'_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-\alpha_{\mathrm{k}}\mathrm{t}}\sin\omega_{\mathrm{k}}\mathrm{t} + \mathrm{C}''_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-\alpha_{\mathrm{k}}\mathrm{t}}\cos\omega_{\mathrm{k}}\mathrm{t}\right); \tag{5}$$

$$\mathbf{i}_{св}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{m}}(\mathbf{C}'_{\mathbf{k}}\sin\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{t} + \mathbf{C}''_{\mathbf{k}}\cos\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{t}). \tag{6}$$

При этом, как следует из выражений (2)-(6), каждый свободный процесс представляет собой сумму собственных процессов. Собственные процессы – это составляющие свободного процесса системы.

Вид собственных процессов определяется свойствами системы.

Представленные свободные процессы относятся к достаточно широкому классу линейных стационарных систем с произвольным числом степеней свободы.

Решения (3) и (4) относятся, в том числе, и к RC-системам, возможность резонанса в которых нам предстоит обсудить. Как уже упоминалось ранее, резонанс в них, если он существует, не может быть объяснен с позиций его классического определения. При действии гармонического сигнала на входе линейной системы с постоянными параметрами на выходе ее появляется напряжение, начиная с момента $t = t_0$. Это напряжение можно определить с помощью интеграла Дюамеля:

$$u_{вых}(t) = \int_{t_0}^{t} u_{вх}(\xi)h_\delta(t-\xi)d\xi, \tag{7}$$

где $h(t-\xi)$ – реакция системы на δ-импульс, представляющая собой свободное колебание, то есть сумму затухающих апериодических и колебательных собственных процессов, которое при $t \geq \xi$ имеет вид:

$$h(t-\xi) = \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k e^{-\alpha_k(t-\xi)} + b_k e^{-\beta_k(t-\xi)}\cos\left[\omega_k(t-\xi) + \varphi_k\right]\right\}, \tag{8}$$

а при $t < \xi$ $h(t-\xi) = 0$. В выражении (8) α_k, β_k и ω_k – положительные величины, а a_k, b_k и φ_k – вещественные постоянные числа. Иначе говоря, функция (8) изображает свободное колебание, возникающее на выходе системы в результате подачи на ее вход δ-импульса в момент ξ.

Из выражения (7) следует, что выходное колебание представляет собой результат взаимодействия входного гармонического напряжения и свободного колебания системы.

После подстановки (8) в (7), замены порядка интегрирования и суммирования получим:

$$u_{вых}(t)=\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\int_{t_0}^{t}u_{вх}(\xi)e^{-\alpha_k(t-\xi)}d\xi+b_k\int_{t_0}^{t}u_{вх}(\xi)e^{-\beta_k(t-\xi)}\cos[\omega_k(t-\xi)+\varphi_k]d\xi\right\} \tag{9}$$

Выражение (9) дает основание заключить, что в общем случае линейной системы с постоянными параметрами выходное напряжение есть сумма результатов взаимодействия входного напряжения с каждым собственным процессом системы в отдельности. В случае системы с одним собственным процессом он одновременно является свободным процессом, как это имеет место в одиночном резонаторе.

Для строгого обоснования критерия существования резонанса представляет интерес выяснить степень влияния спектров собственных процессов системы на характер спектра ее свободного процесса.

Будем иметь ввиду, что среди собственных процессов в соответствии с (9) могут иметь место как колебательные, так и апериодические (экспоненциальные) процессы. При этом возможны случаи, когда свободный процесс состоит только из колебательных, или только из апериодических собственных процессов.

Подставим в (9) вместо функции $u_{вх}(t)$ ее значение, равное $U_{вх}\sin\omega t$, проведем некоторые преобразования и будем иметь

$$u_{вых}(t)=U_{вх}A(\omega,t)\sin\omega t-U_{вх}B(\omega,t)\cos\omega t, \tag{10}$$

где

$$A(\omega,t)=\sum_{k=1}^{n}\left[A_k(\omega,t)_0+A_k(\omega,t)\right];\quad B(\omega,t)=\sum_{k=1}^{n}\left[B_k(\omega,t)_0+B_k(\omega,t)\right] \tag{11}$$

Здесь

$$A_k(\omega,t)_0=a_k\int_0^{t-t_0}e^{-\alpha_k x}\cos\omega x dx$$

$$B_k(\omega,t)_0=a_k\int_0^{t-t_0}e^{-\alpha_k x}\sin\omega x dx;$$

$$A_k(\omega,t)=b_k\int_0^{t-t_0}e^{-\beta_k x}\cos(\omega_k x+\varphi_k)\cos\omega x dx;$$

$$B_k(\omega,t)=b_k\int_0^{t-t_0}e^{-\beta_k x}\cos(\omega_k x+\varphi_k)\sin\omega x dx.$$

Выражение (10) представляет собой выходное напряжение в любой момент *t*, начиная с момента подключения к входу системы синусоидального напряжения $u_{вх}(t)$ и определяет процесс установления колебания на выходе системы. Чтобы получить установившийся процесс, необходимо рассмотреть выражение (10) при неограниченно больших значениях времени *t*. Для этого в его интегралах необходимо верхний предел интегрирования положить равным бесконечности. Тогда после вычисления их получим:

$$A_k(\omega,\infty)_0 = a_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2+\omega^2};\; B_k(\omega,\infty)_0 = a_k \frac{\omega}{\alpha_k^2+\omega^2};$$

$$A_k(\omega,\infty) = \frac{1}{2} b_k cos\varphi_k \left[\frac{\beta_k}{\beta_k^2+(\omega_k+\omega)^2} + \frac{\beta_k}{\beta_k^2+(\omega_k-\omega)^2}\right] - \\ -\frac{1}{2} b_k \sin\varphi_k \left[\frac{\omega_k+\omega}{\beta_k^2+(\omega_k+\omega)^2} + \frac{\omega_k-\omega}{\beta_k^2+(\omega_k-\omega)^2}\right]; \tag{12}$$

$$B_k(\omega,\infty) = -\frac{1}{2} b_k \cos\varphi_k \left[\frac{\omega_k+\omega}{\beta_k^2+(\omega_k+\omega)^2} + \frac{\omega_k-\omega}{\beta_k^2+(\omega_k-\omega)^2}\right] + \\ +\frac{1}{2} b_k \sin\varphi_k \left[\frac{\beta_k}{\beta_k^2+(\omega_k+\omega)^2} + \frac{\beta_k}{\beta_k^2+(\omega_k-\omega)^2}\right].$$

Полученные выражения означают, что на выходе системы установившееся гармоническое колебание будет иметь вид:

$$u_{вых}(t) = U_{вх}\left[A(\omega,\infty)\sin\omega t - B(\omega,\infty)\cos\omega t\right] = U_{вых}(\omega)\sin[\omega t - \psi(\omega)] \tag{13}$$

где $U_{вых}(\omega) = U_{вх}k(\omega)$, $k(\omega) = \sqrt{A(\omega,\infty)^2 + B(\omega,\infty)^2}$,

$$\psi(\omega) = arctg\frac{B(\omega,\infty)}{A(\omega,\infty)};$$

$$A(\omega,\infty) = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k(\omega,\infty)_0 + A_k(\omega,\infty)\right];$$

$$B(\omega,\infty) = \sum_{k=1}^{n}\left[B_k(\omega,\infty)_0 + B_k(\omega,\infty)\right].$$

Функции $A_k(\omega,\infty)_0$ и $A_k(\omega,\infty)$ являются частотными косинусоидальными спектрами собственного апериодического и собственного колебательного процессов с номером k, входящих в состав свободного колебания системы. Функции же $B_k(\omega,\infty)_0$ и $B_k(\omega,\infty)$ изображают синусоидальные частотные спектры тех же собственных процессов. Функции $A(\omega,\infty)$ и $B(\omega,\infty)$ представляют собой соответственно синусоидальные и косинусоидальные частотные спектры всего свободного колебания $h(t)$. Все эти спектры естественно перекрываются. Функция $k(\omega)$ является модулем частотного спектра свободного колебания $h(t)$ и одновременно передаточной функцией рассматриваемой линейной системы с постоянными параметрами.

Если бы свободное колебание состояло только из одного собственного колебания с номером $k = m$, то модуль передаточной функции имел бы вид:

$$k(\omega)_m = \sqrt{A_m(\omega,\infty)^2 + B_m(\omega,\infty)^2}\;. \tag{14}$$

В случаях же, когда $h(t)$ состоит из двух или большего количества собственных процессов, частотный спектр всего отклика равен сумме спектров всех собственных процессов, входящих в $h(t)$. Итак, в общем случае, частотные спектры всех собственных процессов перекрываются.

В частном случае, когда свободное колебание удовлетворяет двум следующим условиям, спектры в первом приближении не будут перекрываться:

А) Свободное колебание состоит только из собственных колебаний вида $b_k e^{-\beta_k t}\cos(\omega_k t+\varphi_k)$, в котором отсутствуют апериодические процессы вида $a_k e^{-\alpha_k t}$.

Б) Коэффициенты β_k настолько малы, что энергия спектров собственных колебаний сосредоточена в разных участках частотной оси.

Когда спектры перекрываются, относительный максимум передаточной функции будет на частоте, зависящей от наличия всех собственных процессов. Следовательно, в общем случае резонанс в линейной системе с постоянными параметрами возникает в результате взаимодействия вынуждающей гармонической силы с суммой всех собственных процессов и происходит на частоте $\omega_р$, при которой модуль суммарного частотного спектра имеет относительный максимум. Такая частота может быть, в общем случае, не одна. Если частота вынуждающей силы ω близка к частоте ω_m одного из собственных колебаний, то это еще не означает, что величина $U_{вых}(\omega)$ будет зависеть от амплитуды b_m этого колебания. Это не означает, что резонансная частота $\omega_р$ будет близка к частоте ω_m. Другие собственные колебания с номерами $k \neq m$ могут иметь столь большие амплитуды b_k по сравнению с b_m, при которых вклад этих колебаний в величину амплитуды $U_{вых}(\omega)$ при ω, близких к ω_m, будет подавляюще велик.

Отсюда следует, что при определении резонансной частоты $\omega_р$, при которой $U_{вых}(\omega)$ достигает относительного максимума, необходимо в общем случае учитывать влияние всех собственных колебаний и собственных апериодических процессов сложной системы.

Величина ω_p зависит от всех параметров: ω_k, b_k, φ_k, β_k, и α_k (k = 1, 2, 3 …, n) собственных процессов свободного колебания $h(t)$.

В случае, когда свободное колебание системы состоит из нескольких собственных процессов, относительно сильный процесс может подавлять более слабый процесс. При этом частоте слабого процесса не будет соответствовать экстремум в суммарном частотном спектре. Таким образом, можно заключить, что каждый из резонансов в системе возникает в результате взаимодействия вынуждающей силы с суммой всех собственных процессов системы, а не в результате взаимодействия только с отдельными собственными процессами, как это следует из традиционного подхода. Это связано с тем, что спектр «нормального» колебания не может перекрывться со спектрами других «нормальных» колебаний.

Еще раз уточним, что понимается под взаимодействием входного гармонического колебания и свободного колебания системы. Выражение (7) определяет выходное колебание как в процесе установления амплитуды, так и в моменты времени, когда его амплитуда уже установилась. Из выражения (7) следует, что выходное колебание зависит от входного колебания и свободного колебания особым образом. Выходное колебание появляется только в том случае, когда существуют одновременно входное и свободное колебания. Амплитуда выходного колебания имеет тем большую величину, чем меньше свободное колебание отличается от входного по форме.

Точнее говоря, чем больше спектральная плотность свободного колебания на частоте входного колебания, тем больше амплитуда установившегося выходного колебания. Поэтому, если на частоте входного гармонического напряжения спектральная плотность свободного колебания имеет максимум, то на этой же частоте имеет максимум и амплитуда выходного гармонического напряжения. Поэтому имеется полное основание считать, что выходное колебание появляется в результате взаимодействия входного и свободного колебаний.

Итак, наличие экстремумов модуля спектра свободного процесса свидетельствует о возможности резонансов в системе. При этом их количество будет соответствовать количеству экстремумов. Частоты, на которых имеют место экстремумы огибающей модуля спектра свободного процесса, являются резонансными частотами системы. В этом и состоит смысл предлагаемого спектрального критерия резонанса.

С точки зрения поставленной задачи нас будет интересовать вопрос: может ли быть получен экстремум огибающей спектра свободного процесса при суперпозиции собственных процессов, имеющих вид экспонент. Иными словами: возможен ли резонанс в системе с экспоненциальными собственными процессами?

Рассмотрим общий случай, когда свободный процесс есть сумма произвольного числа собственных экспоненциальных процессов вида:

$$u_{св} = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + \ldots + C_n e^{-\alpha_n t}. \qquad (15)$$

Тогда частотный спектр свободного колебания (15) системы может быть определен как сумма спектров вида:

$$S(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} S(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{1}{\alpha_k + j\omega} \quad . \qquad (16)$$

Резонанс в линейной системе может иметь место, если существует, хотя бы одна частота ω_p, на которой огибающая модуля спектральной плотности свободного колебания имеет максимум. Для резко выраженного резонанса необходим соответственно резко выраженный максимум огибающей модуля спектра.

Поскольку выражение (16) является спектром свободного процесса (15), представляющего собой сумму экспонент, то необходимо сформулировать условия, при которых в данной системе возможен резонанс. Эта задача сводится к доказательству возможности существования величин α_k и $C_k(k = 1, 2, 3..., n)$, при которых свободный процесс (15) будет с заданной степенью точности представлять собой заранее заданную непрерывную функцию $u_{св}(t)$ с максимумом частотного спектра на заданной частоте ω_p. Покажем вначале, что решение поставленной задачи возможно для кратных в отношении kα корней характеристического уравнения, то есть для случая $\alpha_k = k\alpha(k = 1, 2, 3..., n)$.

Допущение $\alpha_k = k\alpha$ является приемлемым, так как α_k – это корни характеристического уравнения, которое соответствует уравнению линейной стационарной системы (1). Эти корни связаны с коэффициентами уравнения α_1, α_2, …, α_n формулой Виета, в соответствии с которой для класса систем с кратными корнями характеристического уравнения справедливы соотношения:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = -\alpha(1 + 2 + \ldots + n); \quad \alpha = -\frac{a_1}{1 + 2 + \ldots + n};$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}\left[(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}) + (\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-2}\alpha_n) + ... + \alpha_2\alpha_3\alpha_n\right];$$

$$a_n = (-1)^n(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) = (-1)^n\alpha^n n!;$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{(-1)^n\alpha^n n!}{(-1)\alpha 0{,}5n(n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}n!}{0{,}5n(n+1)};$$

$$\alpha^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}\frac{0{,}5n(n+1)}{(-1)^{n-1}n!} = \frac{a_n}{a_1}\frac{(n+1)}{2(n-1)!(-1)^{n-1}}.$$

Из формулы Виета вытекает конструктивный ответ на вопрос о принадлежности любого полинома степени n к рассматриваемому классу полиномов, у которых $\alpha_k = k\alpha$. Действительно, чтобы произвести полином, принадлежащий к рассматриваемому классу, в соответствии с формулой Виета необходимо, чтобы отношение a_n/a_1 имело вид:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{\alpha^n}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k} = A\alpha^{n-1}(-1)^{n-1},$$

где

$$A = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{1+2+3+...+n} = \frac{n!}{0{,}5n(1+n)} = \frac{2(n-1)!}{n+1}.$$

Тогда для величины α получим

$$\alpha = -\left(\sqrt[n-1]{a_n/a_1A}\right).$$

Это означает, что представление решения (15) в виде суммы экспонент с кратными показателями возможно лишь при величине α, зависящей от коэффициентов уравнения. Тогда свободное колебание системы может быть представлено в виде:

$$u_{св}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{-\alpha_k t} = \sum_{k=1}^{n} C_k\left(e^{-\alpha t}\right)^k. \tag{17}$$

Введем обозначение $e^{-\alpha t} = x$, откуда $t = -\frac{1}{\alpha}\ln x$. Очевидно, что, если $0 \le t < \infty$, то $1 \ge x > 0$. С учетом этого выражение (17) примет вид:

$$u_{св}\left(-\frac{1}{\alpha}\ln x\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k.$$

Обозначим $u_{св}\left(-\frac{1}{\alpha}\ln x\right) = f(x)$. Тогда поставленная задача может быть сформулирована так: существуют ли величины $C_k(k = 1, 2, 3, ..., n)$, при которых степенной полином с заданной степенью точности аппроксимирует заданную непрерывную функцию $f(x)$ в интервале $1 \ge x > 0$?

В соответствии с теоремой Вейерштрасса при достаточно большом **n** существуют такие коэффициенты C_k, при которых выполняется неравенство $\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k x^k\right| \le \varepsilon$, $0 < x \le 1$, где ε – сколь угодно малая положительная величина.

Теорема верна для любой непрерывной функции $f(x)$, а значит, и для свободного колебания $u_{св}(t)$, которое может иметь частотный спектр с экстремумом типа "максимум" на частоте ω_p, причем, количество таких частот может быть произвольным. Отсюда следует, что в линейной системе, в которой все собственные процессы экспоненциальные, в соответствии со спектральным критерием и при определенных условиях возможен сколь угодно резко выраженный резонанс на заранее заданных частотах. Существенно то, что эти процессы не являются ортогональными.

Теперь можно сформулировать общее определение резонанса с учетом спектрального критерия.

Резонанс – это явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний в линейной стационарной системе до величины относительного максимума при приближении частоты гармонического внешнего воздействия к значению, соответствующему любому экстремуму огибающей модуля спектра свободного процесса этой системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Папалекси Н.Д.* Эволюция понятия резонанса / Н.Д. Папалекси // Успехи физических наук. – 1947. – Т. 31. – Вып. 4.
2. *Харкевич А.А.* Основы радиотехники. – М.: ГИЛ по вопросам связи и радио, 1963.
3. *Виницкий А.С.* Модулированные фильтры и следящий прием ЧМ / А.С. Виницкий. – М.: Сов. радио, 1969.

Зельманов Самуил Соломонович
Московский технический университет связи и информатики (Волго-Вятский филиал).
E-mail: zelmanss@yandex.ru.
603011, г. Нижний Новгород, Менделеева, 15.
Тел.: 8312457505.
Кафедра общепрофесиональных дисциплин; доцент.

Zelmanov Samuil Solomonovich
Moscow Technical University of Communication and Information Sciens (Volgo-Vyatskiy Branch).
E-mail: zelmanss@yandex.ru.
15, Mendeleeva Street, Nizhny Novgorod, 603011, Russia.
Phone: 8312457505.
The Departament of General Technical and Professional Subjects; Associate Professor.

УДК 519.687.1

А.А. Рахманов

ПРИНЦИПЫ И ПОДХОДЫ К КОНЦЕПТУАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрены: новая форма ведения боевых действий – сетецентрические войны, их основные отличительные особенности и фазы; техническая основа ведения сетецентрических войн – сетецентрические системы управления и основные проблемные вопросы, связанные с их созданием и внедрением в российской армии; актуальность создания сетецентрических систем управления на региональном уровне; технические и технологические решения, имеющиеся в заделе у предприятий Концерна «РТИ Системы».

Сетецентрические войны; сетецентрические системы управления; технические и технологические решения.