УДК 519.622.2

В.А. Ляшев

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА СОВМЕСТНЫХ РЕЛАКСАЦИЙ

Рассматривается метод совместных релаксаций, дана его математическая формулировка. Исследуется проблема устойчивости метода, которая возникает вследствие появления задержек обмена данными между разделенными частями.

Устойчивость; задержка; релаксация.

V.A. Lyashev

STABILITY OF CONCURRENT RELAXATION TECHNIQUES

In the article Concurrent Relaxation Technique is presented. We research the stability problem for this technique, which always obtains in partitioned systems after delayed feedback decomposition.

Stability, delay, relaxation.

Важнейшей проблемой современной энергетики является анализ и управление режимами и переходными процессами энергосистем различного назначения, в частности энергосистем подвижных объектов. Современные мощные энергообъекты энергосистем, например энергоблоки судов, состоят из ряда отдельных агрегатов, рабочие процессы которых взаимно влияют друг на друга. В свою очередь, в состав электро- или теплостанций обычно входит группа энергоблоков, работающих на общую нагрузку энергосети. Очевидно, что протекающие в этих энергоблоках технологические процессы также взаимосвязаны между собой через нагрузку или общий первичный энергоисточник. Указанные взаимосвязи и взаимовлияния как между составными частями энергообъекта, так и между группами энергообъектов, требуют разработки системного подхода к организации технологических процессов в этих энергообъектах. Иначе говоря, существенное влияние и взаимосвязь технологических процессов как в отдельных агрегатах, так и в группе энергообъектов, приводит к необходимости рассмотрения их как единого целого, как некоторой единой динамической системы со своими показателями и характеристиками. Поэтому разрозненный анализ процессов в отдельных агрегатах энергообъекта может не только не дать общего эффекта, но даже привести к ухудшению показателей работы энергосистемы. Между тем, раздельное рассмотрение процессов в составных частях энергообъектов продолжает оставаться достаточно распространенным при их исследовании и проектировании, так как позволяет упростить сложность анализируемой задачи и снизить вычислительные затраты при численном анализе такой системы.

Таким образом, возникает две проблемы, с одной стороны энергообъекты представляют собой сложные динамические системы, которые следует рассматривать как единое целое, чтобы учесть взаимовлияние отдельных частей друг на друга. В то же время, проблема анализа динамических систем большой размерности, к которым относятся и энергосистемы, остается открытой, так как требует существенных вычислительных затрат. Многомерность и многосвязность таких систем не позволяют использовать алгоритмы параллельных вычислений для реализации на кластерных вычислительных системах в явном виде. Альтернативой могут служить релаксационные алгоритмы, которые во многих случаях позволяют, анализируя объект по частям в силу его модульной структуры, учесть взаимовлияние как смежных частей, так и связь всех частей через общую нагрузку или источник энергии.

Наиболее интересный и наименее известный метод – Concurrent Relaxation. Идеи, высказанные Владимиром Дмитриев-Здоровым и Бернхардом Клаассеном в конце 90-х годов XX в. [1] дали толчок к исследованиям в этой области. Основная идея метода заключается в том, что декомпозиция нарушает принцип одновременности процессов, протекающих в различных частях. Это приводит не только к появлению погрешности решения, но и, как правило, вызывает его неустойчивость. С физической точки зрения это обстоятельство можно объяснить тем, что при организации взаимодействия между частями системы неизбежно возникают задержки, которые отсутствовали в исходной модели. Поэтому было предложено ввести новый параметр – *временную задержку,* которая позволит более адекватно описать разделенную систему [1]. Действительно, нет смысла анализировать разделенную систему как исходный объект и не учитывать новые свойства. Но здесь появляется новая проблема: насколько адекватно разделенная система с введенными задержками описывает исходный объект моделирования. Предполагается, что исходная и разделенная модели адекватны: практически, это означает адекватность решений (откликов) обоих вариантов систем при одних и тех же начальных условиях и внешних воздействиях. Таким образом, в качестве меры их адекватности можно использовать различие откликов систем.

Можно показать, что результирующая декомпозированная модель не может быть идентичной исходной математической модели, даже если ошибка вычислений и дискретизации пренебрежимо мала. Такая модель есть результат специального вида декомпозиции, *delayed feedback decomposition*, которая приводит к особой форме релаксационного процесса [2, 3].

Если анализируемая цепь или любой другой объект можно представить в виде набора нескольких блоков (модулей), соединенных между собой (рис. 1,а), то модульный подход к моделированию такой системы подразумевает организацию взаимодействия этих блоков посредством некоторого интерфейса обмена (рис. 1,б), который вносит свои ошибки и задержки обмена. Но если природа возникновения ошибок – это конечность разрядной сетки вычислителя и дискретизация непрерывных временных функций, т.е. аналогична погрешностям, характерным для численных методов, то задержки обмена между частями – это особенность модульного подхода. По мнению [4], временные задержки и есть первичная причина неустойчивости релаксационного процесса. Таким образом, имеет смысл аппроксимировать модульное представление модели объекта с учетом задержек обмена как показано на рис. 1,в.

Математически замена исходной модели некоторой системы (рис. 1,а) на аппроксимирующую модель (рис. 1,в) соответствует переходу от системы уравнений

$$F_i(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,n) \tag{1}$$

к новой системе уравнений с задержками

$$F_i(x_1(t-\tau_{i,1}),\dots, x_{i-1}(t-\tau_{i,i-1}), x_i(t), x_{i+1}(t-\tau_{i,i+1}),\dots, x_n(t-\tau_{i,n})) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n), \tag{2}$$

где $F_i(\cdot)$ – некоторые дифференциальные операторы.

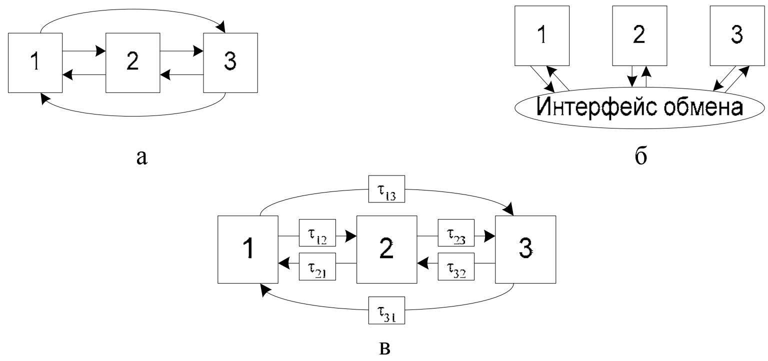

Рис. 1. Модульный подход: а – исходный объект; б – модульная структура моделирования; в – разделение с задержкой – совместные релаксации

Можно показать [1], что (2) может рассматриваться как релаксационный метод для решения (1). Действительно, (2) есть непрерывный вид хорошо известных дискретных итерационных методов релаксации таких, как временной анализ (ТА), итерационный временной анализ (ITA), релаксация формы сигнала (WR) [2].

В [4] предложен термин Concurrent Relaxation (CR, метод совместных релаксаций, МСР) для обозначений метода моделирования энергосистемы (рис. 1,а) посредством аппроксимации с задержкой (рис. 3,в).

Если в качестве тестовой задачи рассматривать систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\mathrm{C}\dot{\mathrm{X}} + \mathrm{AX} + \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C}, \mathrm{A} \in \mathrm{R}^{N\times N}, \quad \mathrm{X}, \mathrm{B} \in \mathrm{R}^{N}, \tag{3}$$

то МСР можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{Q}_C \dot{\mathrm{X}}(t) + S_C \dot{\mathrm{X}}(t-\tau) + \mathrm{A}_C \mathrm{X}(t) + \mathrm{A}_C \mathrm{X}(t-\tau) + \mathrm{B}(t) = 0, \tag{4}$$

Q_C,Q_A,$\mathbf{S}_C$,$\mathbf{S}_A$∈, X,B∈ $\mathrm{R}^{N\times N}$, $|\mathrm{Q}_C| \neq 0$, $\dot{\mathrm{X}}$ – производная вектора X по времени.

Введем новые матрицы:

$$\alpha = \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{S}_C, \ \beta = \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{Q}_A, \ \gamma = \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{S}_A, \ \delta = \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{B}. \tag{5}$$

Теперь (4) можно перезаписать в виде

$$\dot{\mathrm{X}}(t) + \alpha\dot{\mathrm{X}}(t-\tau) + \beta\mathrm{X}(t) + \gamma\mathrm{X}(t-\tau) + \delta = 0. \tag{6}$$

Прежде всего определим устойчивость исходной системы, так как нет смысла пытаться получить устойчивое решение для неустойчивой системы (3).

Известно, что решение уравнения (3) устойчиво при условии, что корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть (математическая интерпретация критерия устойчивости Ляпунова). Характеристическим уравнением для (3) является равенство

$$|-\mathrm{C}^{-1}\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}| = 0.$$

Корнями такого уравнения будут собственные числа матрицы $-\mathrm{C}^{-1}\mathrm{A}$. Тогда условие устойчивости исходной системы, описываемой (3), можно записать в следующем виде:

$$Re[eig(\text{-}C^{-1}A)] < 0.$$

Известно, что $Re[eig(-A)] = -Re[eig(A)]$, поэтому можно знак минус вынести и записать

$$Re[eig(C^{-1}A)] > 0.$$

Если **C** и **A** записать через матрицы расщепления

$$\mathrm{W} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{A} = \left(\mathrm{Q}_C + \mathrm{S}_C\right)^{-1} \times \left(\mathrm{Q}_A + \mathrm{S}_A\right) = \mathrm{Q}_C^{-1}\left(\mathrm{I} + \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{S}_C\right)^{-1} \times \left(\mathrm{Q}_A + \mathrm{S}_A\right) =$$

$$= \left(\mathrm{I} + \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{S}_C\right)^{-1} \times \left(\mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{Q}_A + \mathrm{Q}_C^{-1}\mathrm{S}_A\right) = \left(\mathrm{I} + \alpha\right)^{-1} \times \left(\beta + \gamma\right),$$

то условие устойчивости исходной системы примет форму

$$\mathrm{Re}[eig\{(\mathrm{I}+\alpha)^{-1}\times(\beta+\gamma)\}] > 0. \tag{7}$$

Если задержка $\tau = h$ ($h=const$), то МСР (6) можно представить в виде метода временного анализа, из чего можно сделать вывод, что вторым требованием устойчивости является требование $\rho(\alpha)<1$. Понятно, что двух предыдущих условий недостаточно и они ограничиваются случаем $\tau = h$. Таким образом, необходимо определить третье условие – требование к величине задержки, которая в общем случае может быть не равной h, но если при $\tau < h$ мы берем $\tau = h$, то при $\tau > h$ необходимо обозначить границы изменения задержки, при которых математическая модель (2) остается устойчивой. Таким образом, задача оценки допустимых временных задержек в разделенной системе сводится к оценке свойств оператора перехода $\mathrm{W}(\tau)$ как параметрического функционала, который позволит сформулировать необходимые требования к величине временной задержки τ, гарантирующие устойчивость МСР.

Пусть исходная (неразделенная) линейная система описывается уравнением (3) на интервале $t\in[0, T_{max}]$, а разделение с задержкой приводит к выражению (4). В качестве начального условия возьмем $\mathrm{X}_0\in \mathrm{R}^N$.

Разобьем интервал $[0, T_{max}]$ на отрезки длиной τ: $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$, … Обозначим $y_i(T) = X[(i\text{-}1)\tau+T]$, $T\in[0, \tau]$, $i = 1,2,\ldots$. Для того чтобы начать вычисления в соответствии с (4), необходимо задать начальные приближения для $y_0(T)$ и $\dot{y}_0(T)$. Положим $y_0(T) \equiv \mathrm{X}_0$; $\dot{y}_0(T) \equiv 0$.

В этих предположениях устойчивость процесса (4) будем понимать как условие сжимаемости отображения $(y_i - y_{i-1}) \Leftarrow (y_{i-1} - y_{i-2})$ при любых начальных условиях и начальных приближениях.

Поинтервальный анализ процесса решения с учетом обозначений (5) приводит к выражению

$$y_i(T) = -\alpha y_{i-1}(T) + e^{-\beta T}\alpha y_{i-1}(0) + \int_0^T e^{\beta(\theta - T)}\beta\alpha y_{i-1}(\theta)d\theta - \int_0^T e^{\beta(\theta - T)}\gamma y_{i-1}(\theta)d\theta -$$

$$-\int_0^T e^{\beta(\theta-T)}\delta d\theta + e^{-\beta T}y_i(0) = -\alpha y_{i-1}(T) + e^{-\beta T}\left(\alpha y_{i-1}(0) + y_i(0)\right) - \int_0^T e^{\beta(\theta-T)}\delta d\theta +$$

$$+\int_0^T e^{\beta(\theta-T)}(\beta\alpha - \gamma)y_{i-1}(\theta)d\theta.$$

Оценка разности между отрезками решений, получаемых на соседних интервалах:

$$z_i(T) = y_i(T) - y_{i-1}(T) =$$
$$= -\alpha z_{i-1}(T) + e^{-\beta T}\alpha z_{i-1}(0) + e^{-\beta T} z_i(0) + \int_0^T e^{\beta(\theta - T)}(\beta\alpha - \gamma) z_{i-1}(\theta) d\theta. \tag{8}$$

Последнее является функциональным итерационным выражением. Из него необходимо получить условие сжимаемости отображения $z_i(T) \Leftarrow z_{i-1}(T)$.

Заметим, что соотношение (8) справедливо для любых $T \in [0, \tau]$. В частности, при $T = \tau$ с учетом $z_{i-1}(\tau) = z_i(0)$ оно преобразуется к виду

$$z_i(\tau) = (-\alpha + e^{-\beta\tau}) z_{i-1}(\tau) + e^{-\beta\tau}\alpha z_{i-2}(\tau) + \int_0^\tau e^{\beta(\theta-\tau)}(\beta\alpha - \gamma) z_{i-1}(\theta) d\theta. \tag{9}$$

Сходимость функциональной последовательности (9) является необходимым условием устойчивости системы (6). С другой стороны, устойчивость линейной стационарной системы есть свойство инвариантное по отношению к временному сдвигу. Следовательно, сходимость (9) является также и достаточным условием устойчивости (6).

Более «развернутое» выражение, имеющее большее число членов, не содержащих интегралы, можно получить, если оценку для $z_{i-1}(\theta)$ взять из (8) и подставить в интеграл в (9) и т.д. При этом каждое слагаемое можно разложить по степеням в ряд Тейлора.

Важно отметить, что данный подход не позволяет получить замкнутое выражение для оператора перехода $W(\tau)$, такого, что $z_i = W(\tau) z_{i-1}$. Вместе с тем можно найти несколько первых членов разложения $W(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням τ и на их основе произвести необходимые оценки.

Предположим, что итерационная формула порядка m получена в виде

$$z_i = k_1(\tau) z_{i-1} + k_2(\tau) z_{i-2} + \ldots + k_m(\tau) z_{i-m}\ , \tag{10}$$

причем коэффициенты являются функциями τ. Далее используем известную методику [5]. Каждый из коэффициентов $k_l(\tau)$ раскладываем по степеням τ: $k_l(\tau) = k_{l0} + k_{l1}\tau + k_{l2}\tau^2 + \ldots$. Как известно, свойства оператора перехода $W(\tau)$ полностью определяются корнями $w_j(\tau)$ ($j = 1,2,\ldots,m$) характеристического уравнения

$$z^m = k_1 z^{m-1} + k_2 z^{m-2} + \ldots + k_m\,. \tag{11}$$

Необходимым условием устойчивости системы является выполнение условий $|w_j(T)| < 1$ для каждого из m корней, т.е. собственные значения оператора перехода $W(\tau)$ находятся внутри единичной окружности.

Корни будем также искать в виде разложения по степеням τ: $w_j(\tau) = w_{j0} + w_{j1}\tau + w_{j2}\tau^2 + \ldots$. Для нахождения коэффициентов w_{j0} для всех корней решаем характеристическое уравнение (11) при $k_l = k_l(0) = k_{l0}$. Далее для нахождения коэффициентов w_{j1} в разложении каждого из корней вновь решаем характеристическое уравнение (11). На этот раз каждый из корней представляем в виде суммы $w_j = w_{j0} + w_{j1}\tau$, где w_{j0} уже известен, а в качестве коэффициентов в (11) используем два первых члена разложения $k_l = k_{l0} + k_{l1}\tau$. Подставляя эти выражения в (11), перемножаем двучлены, описывающие корни и коэффициенты, и рассматриваем только коэффициенты при τ. Они образуют линейное уравнение относительно w_{j1}. После того как все w_{j1} найдены, в разложении корней и коэффициентов в ряд берем на одно слагаемое больше. Подставляя соответствующие выражения в (11), аналогичным образом находим коэффициенты w_{j2} и т.д.

Таким образом, для различных способов аппроксимации производных на границах интервалов получаем разные оценки.

Все оценки критической задержки в табл. 1 не учитывают жесткость системы. Понятно, что жесткость системы связана с постоянными времени, т.е. она оказывает существенное влияние на оценку критической задержки τ_c. Часто в качестве оценки жесткости системы используют отношение наименьшего собственного числа к наибольшему собственному числу матрицы $C^{-1}A$ для уравнения в форме (3). Таким образом, можно учесть жесткость системы следующим образом:

$$\tau_{c\_stiff} = \tau_c \lambda_{min} / \lambda_{max},$$

где $\lambda_{\min} = min\{Re[eig((I+\alpha)^{-1}(\beta+\gamma))]\}$, $\lambda_{\max} = max\{Re[eig((I+\alpha)^{-1}(\beta+\gamma))]\}$.

Таблица 1

Выражения для оценки критической задержки декомпозированной системы

Способ аппроксимации	Оценка корней хар-го уравнения	Критическая задержка
Простейшая явная схема	$w_1(\tau) = I - (I+\alpha)^{-1}\times$ $\times(\beta+\gamma)\tau + O(\tau^2)$; $w_2(\tau) = -\alpha - (I+\alpha)^{-1}\times$ $\times(\beta\alpha-\gamma)\tau + O(\tau^2)$	$\tau_c \cong \dfrac{1-\rho(\alpha)}{\left\|(\mathbf{I}+\alpha)^{-1}(\beta\alpha-\gamma)\right\|_\alpha}$
Простейшая неявная схема	$w_1(\tau) = I - (I+\alpha)^{-1}\times$ $\times(\beta+\gamma)\tau + O(\tau^2)$; $w_2(\tau) = -\alpha + (I+\alpha)^{-1}\times$ $\times(\beta\alpha-\gamma)\alpha\tau + O(\tau^2)$	$\tau_c \cong \dfrac{1-\rho(\alpha)}{\left\|(\mathbf{I}+\alpha)^{-1}(\beta\alpha-\gamma)\alpha\right\|_\alpha}$

Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу: пусть задана система линейных дифференциальных уравнений.

В качестве функций-воздействий возьмем обобщенную единичную функцию $\sigma(t-0)$. Выполняется полная декомпозиция задачи методом совместных релаксаций по шаблону Якоби. В результате получаем четыре подсистемы уравнений, которые на каждой временной точке решаются независимо, а обновление смежных релаксированных компонент вектора неизвестных происходит с задержкой τ. Оценки критических задержек, вычисленных по формулам из табл. 1, следующие.

Таблица 2

Оценки критической задержки τ_C

Экспериментальная оценка τ_c	Ранее предложенная оценка[1]	«Явная» аппроксимация производной	«Неявная» аппроксимация производной
5,5 мс	0,038 мс	3,74 мс	3,46 мс

Видно, что предложенные в настоящей работе оценки критической задержки значительно ближе к реальной, но все же отличаются от определенной в результате вычислительных экспериментов (5,5 мс) почти в 2 раза. Скорей всего, более точную оценку получить не удастся в обобщенном виде, основываясь только на матрицах α, β, γ. Для повышения достоверности оценки необходимо учитывать способ расщепления и другие особенности конкретной задачи. На рис. 1 приводят-

[1] Оценка, предложенная в [4].

ся решения системы уравнений методом исключений Гаусса (“Exact”) и методом совместных релаксаций (“CR”) для различных задержек τ: 3 мс, 4,5 мс, 5,5 мс, 6 мс.

Подводя итог, условия применимости МСР можно определить следующим образом:

1. Исходная система устойчива, т.е. все собственные значения системной матрицы находятся в левой полуплоскости.
2. Спектральный радиус оператора перехода меньше единицы.
3. Максимальная задержка обмена в разделенной системе не превышает τ_C, что гарантирует устойчивость метода совместных релаксаций.
4. Задержка обмена не превышает постоянную времени в точке разделения $\tilde{\tau}_C = \tau_C / \lambda_{\max}^{SYST}$.

Выполнение данных условий гарантирует устойчивость решения, полученного посредством МСР, а также его существенную близость к точному решению. Однако вопрос погрешности метода остается открытым, но уже сейчас можно сказать, что погрешность метода совместных релаксаций зависит от задержки при решении линейных дифференциальных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dmitriev-Zdorov V., Klaassen B., Paap K.-L.* Improvement of stability in cosimulation of tightly-coupled systems. – Proc. of 9th European Simulation Symposium (ESS’97), Oct. 19-23, 1997, Passau, Germany. – P. 639-643.
2. *Dmitriev-Zdorov V.B., Lyashev V.A.,* Concurrent Relaxation and the Stability Problem in Mixed-Mode Cosimulation of Tightly-Coupled Systems, Proc. of Internat. Conf. “Modelling As a Tool of Solving Engineering and Humanitarian Problems” (M-2002). Part 2.- Taganrog: TSURE, 2002. – P. 18-22.
3. *Dmitriev-Zdorov V.B., Lyashev V.A., Maksimov M.N.,* Modified Concurrent Relaxation Method and Improving the Stability of Numerical Analysis by Partitioning, Proc. of International conference “Information Technologies In Natural, Technical And Humanitarian Sciences” (IT-2002). Part 3. – Taganrog: TSURE, 2002. – P. 35-37.
4. *Dmitriev-Zdorov, V.B., Dougal R.A., Merezhin N.I., Popov V.P.* Stability of Real-Time Modular Simulation of Analog Systems. – Proc. of IEEE Workshop on Computers in Power Electronics, Blacksburg, VA, July 2000. P. 255-259.
5. *Чуа Л.О., Лин П.М.* Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.

Ляшев Владимир Александрович

Технологический институт Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: Lyashev@tti.sfedu.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371632.

Lyashev Vladimir Alexandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: Lyashev@tti.sfedu.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: 88634371632.