УДК 519.614.4

**Е.Н. Богданенко**

## РАЗВЕРТЫВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА И НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ ПО ЭЛЕМЕНТАМ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

*Проект посвящен нахождению собственных значений трехдиагональных матриц. Изложен алгоритм нахождения коэффициентов характеристического полинома симметричных трехдиагональных матриц с последующей локализацией его корней на основе метода сортировки. Приведена матричная форма алгоритма.*

*Трехдиагональные матрицы; характеристический полином; собственные числа.*

**E.N. Bogdanenko**

## DEVELOPMENT OF CHARACTERISTIC POLYNOMIAL AND FINDING OF EIGENVALUES ON ELEMENTS OF THREE-DIAGONAL MATRICES

*A project is devoted finding of eigenvalues of three-diagonal matrices. The algorithm of finding of coefficients of characteristic polynomial of symmetric three-diagonal matrices is expounded with subsequent localization of his roots on the basis of method of sorting. The matrix form of algorithm is resulted.*

*Three-diagonal matrices; characteristic polynomial; own numbers.*

Излагается алгоритм нахождения коэффициентов характеристического полинома симметричной матрицы, основанный на применении формулы Хессенберга с последующим использованием схемы на основе сортировки для определения корней этого полинома. Рассматривается параллельная матричная форма алгоритма, конструируемая на модели неветвящейся параллельной программы без учета обмена; временная сложность (время выполнения) оценивается числом последовательных шагов алгоритма.

**Метод нахождения характеристического полинома симметричной трехдиагональной матрицы.** Рассматривается следующая задача на собственные значения:

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{1}$$

где $A$ – симметричная трехдиагональная матрица вида

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Определитель из левой части (1) рекуррентно определяется последовательностью полиномов

$$f_m(\lambda)=(a_m-\lambda)\cdot f_{m-1}(\lambda)-b_m^2\cdot f_{m-2}(\lambda),\ m=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

известной как последовательность Штурма [1], (3) получается из (1) по индукции, причем $f_0(\lambda)=1$, $f_1(\lambda)=a_1-\lambda$, $f_2(\lambda)=a_1a_2-b_2^2-(a_1+a_2)\lambda+\lambda^2$, т.е. $f_i(\ i=0,1,\dots,m)$ – диагональные миноры. Каждый такой минор представляет собой характеристический полином матрицы

$$A_{\dim m}=\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m & a_m \end{pmatrix},$$

где $m=2,3,\dots,n$, который может быть записан в виде

$$f_m(\lambda)=d_{m0}-d_{m1}\lambda+d_{m2}\lambda^2+\dots+(-1)^m d_{mm}\lambda^m. \qquad (4)$$

В частности, определитель из (1) является характеристическим полиномом матрицы $A$: $f_n(\lambda)=d_0-d_1\lambda+d_2\lambda^2+\dots+(-1)^n d_n\lambda^n$.

Схема нахождения коэффициентов характеристического полинома строится на основе равенства выражений (3) и (4) при $m=1,2,\dots,n$:

| | по формуле (3) | по формуле (4) |
|---|---|---|
| $f_0(\lambda)=$ | $1$ | $d_{00}$ |
| $f_1(\lambda)=$ | $a_1-\lambda$ | $d_{10}-d_{11}\lambda$ |
| $f_2(\lambda)=$ | $a_1a_2-b_2^2-(a_1+a_2)\lambda+\lambda^2$ | $d_{20}-d_{21}\lambda+d_{22}\lambda^2$ |
| $f_3(\lambda)=$ | $a_1a_2a_3-a_1b_3^2-a_3b_2^2-$ $-(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\lambda+$ $+(a_1+a_2+a_3)\lambda^2-\lambda^3$ | $d_{30}-d_{31}\lambda+d_{32}\lambda^2-d_{33}\lambda^3$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |

Отсюда получаем отношения

$$\begin{gathered} d_{00}=1 \\ d_{10}=a_1 \quad , \quad d_{11}=d_{00} \\ d_{20}=d_{10}a_2-b_2^2 \quad , \quad d_{21}=d_{10}+a_2 \quad , \quad d_{22}=d_{11} \\ d_{30}=d_{20}a_3-d_{10}b_3^2 \quad , \quad d_{31}=d_{20}+d_{21}a_3-b_3^2 \ , \\ d_{32}=d_{21}+a_3 \quad , \quad d_{33}=d_{22} \\ \dots \\ d_{k0}=a_kd_{(k-1)0}-b_k^2d_{(k-2)0} \quad , \quad d_{k1}=d_{(k-1)0}+a_kd_{(k-1)1}-b_k^2d_{(k-2)1} \ , \\ d_{k2}=d_{(k-1)1}+a_kd_{(k-1)2}-b_k^2d_{(k-2)2} \ , \\ d_{k3}=d_{(k-1)2}+a_kd_{(k-1)3}-b_k^2d_{(k-2)3} \ , \\ \dots \end{gathered} \qquad (5)$$

$$d_{k(k-3)} = d_{(k-1)(k-4)} + a_k d_{(k-1)(k-3)} - b_k^2 d_{(k-2)(k-3)}\ ,$$

$$d_{k(k-2)} = d_{(k-1)(k-3)} + a_k d_{(k-1)(k-2)} - b_k^2\ ,$$

$$d_{k(k-1)} = d_{(k-1)(k-2)} + a_k\ ,\ d_{kk} = d_{(k-1)(k-1)}\ , \quad k = 1,2,\dots,n\ .$$

Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена $f_k(\lambda) = d_{k0} - d_{k1}\lambda + d_{k2}\lambda^2 + \ldots + (-1)^k d_{kk}\lambda^k$ матрицы $A_{\dim k}$ ( $k = 1,2,\dots,n$ ) рекуррентно выражаются через элементы $a_k$ и $b_k$ этой матрицы и коэффициенты характеристических полиномов $f_{k-1}(\lambda)$ и $f_{k-2}(\lambda)$ матриц $A_{\dim k-1}$ и $A_{\dim k-2}$ соответственно.

В матричной форме (5) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} d_{kk} \\ d_{k(k-1)} \\ d_{k(k-2)} \\ \vdots \\ d_{k1} \\ d_{k0} \end{pmatrix} = \left( \underbrace{\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ a_k & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a_k & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_k & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & a_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_k \end{matrix}\right\} k+1}_{k} \right) \times \begin{pmatrix} d_{(k-1)(k-1)} \\ d_{(k-1)(k-2)} \\ \vdots \\ d_{(k-1)1} \\ d_{(k-1)0} \end{pmatrix} - b_k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{(k-2)(k-2)} \\ \vdots \\ d_{(k-2)2} \\ d_{(k-2)1} \\ d_{(k-2)0} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Запись в виде алгебраической суммы делает рекурсивные вычисления громоздкими. В связи с этим (6) преобразовывается таким образом, чтобы формула содержала операцию умножения матриц и не содержала операции их сложения. Очевидно, этому условию удовлетворяет равенство

$$\begin{pmatrix} d_{kk} \\ d_{k(k-1)} \\ \vdots \\ d_{k1} \\ d_{k0} \\ d_{(k-1)(k-1)} \\ d_{(k-1)(k-2)} \\ \vdots \\ d_{(k-1)1} \\ d_{(k-1)0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ a_k & 1 & 0 & & O & \\ 0 & a_k & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & O & & & a_k & 1 \\ & & & & 0 & a_k \end{matrix}\right\} k+1}_{k} & \underbrace{\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & O & \\ -b_k^2 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & O & & & -b_k^2 & 0 \\ & & & & 0 & -b_k^2 \end{matrix}\right\} k+1}_{k-1} \\ \underbrace{I}_{k}\}k & \underbrace{O}_{k-1}\}k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{(k-1)(k-1)} \\ d_{(k-1)(k-2)} \\ \vdots \\ d_{(k-1)1} \\ d_{(k-1)0} \\ d_{(k-2)(k-2)} \\ d_{(k-2)(k-3)} \\ \vdots \\ d_{(k-2)1} \\ d_{(k-2)0} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

правая часть которого представляет собой произведение матрицы на вектор.

Замена в (7) $k$ на $k-1$ позволяет аналогично представить вектор из правой части. Описанный рекуррентный процесс при $k = n$ влечет выражение коэффициентов многочлена (4) через элементы исходно заданной матрицы (2):

$$\begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ a_n & 1 & 0 & & O & \\ 0 & a_n & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & O & & & a_n & 1 \\ & & & & 0 & a_n \end{matrix}}_{n}\right\}n+1 & \left.\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & O & \\ -b_n^2 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & O & & & -b_n^2 & 0 \\ & & & & 0 & -b_n^2 \end{matrix}}_{n-1}\right\}n+1 \\ \left.\underbrace{I}_{n}\right\}n & \left.\underbrace{O}_{n-1}\right\}n \end{pmatrix} \times \tag{8}$$

$$\times \begin{pmatrix} \left.\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & O & \\ 0 & a_{n-1} & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & O & & & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 0 & a_{n-1} \end{matrix}}_{n-1}\right\}n & \left.\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & O & \\ -b_{n-1}^2 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & O & & & -b_{n-1}^2 & 0 \\ & & & & 0 & -b_{n-1}^2 \end{matrix}}_{n-2}\right\}n \\ \left.\underbrace{I}_{n-1}\right\}n-1 & \left.\underbrace{O}_{n-2}\right\}n-1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \ldots \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Размерность произведения (8) последовательно возрастает справа налево на две единицы. При умножении в (8) справа налево – матрицы на вектор – текущий множитель всегда вектор. Временная сложность такого умножения составляет:

$$T(2k-1) = t_y + 2t_c,$$
$$T(1) = (2k-1)\ t_y + 2(k-1)\ t_c.$$

Отсюда для нахождения всех коэффициентов уравнения (4) потребуется время $T(2n-1) \le n(t_y + 2t_c)$.

**Максимальный параллелизм нахождения характеристического полинома симметричной трехдиагональной матрицы.** Попарные умножения матриц из (8) можно выполнять одновременно и взаимно независимо, используя следующую схему. В обозначениях:

$$\left.\begin{aligned}
&D_k=\begin{pmatrix} d_{kk}\\ d_{k(k-1)}\\ d_{k(k-2)}\\ \vdots\\ d_{k1}\\ d_{k0}\end{pmatrix},\quad D_{k-1}=\begin{pmatrix} d_{(k-1)(k-1)}\\ d_{(k-1)(k-2)}\\ \vdots\\ d_{(k-1)1}\\ d_{(k-1)0}\end{pmatrix},\\
&A_k=\left(\underbrace{\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & & 0 & 0\\
a_k & 1 & 0 & & 0 & 0\\
0 & a_k & 1 & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & a_k & & 0 & 0\\
\dots & \dots & 0 & & 1 & 0\\
\dots & \dots & \dots & & a_k & 1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_k
\end{array}}_{k}\right)\Bigg\}k+1,\quad
B_k=\left(\underbrace{\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & & O & \\
-b_k^2 & 0 & 0 & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & 0 & 0\\
 & O & & & -b_k^2 & 0\\
 & & & & 0 & -b_k^2
\end{array}}_{k-1}\right)\Bigg\}k+1
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

(7) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} D_k\\ D_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_k & B_k\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_{k-1}\\ D_{k-2}\end{pmatrix}.$$

Тогда (8) представляется в виде

$$\begin{pmatrix} D_n\\ D_{n-1}\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} A_i & B_i\\ I & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} D_1\\ D_0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Умножение матриц в (10) можно выполнить по схеме сдваивания за $\lceil log_2 n\rceil$ основных шагов, на каждом из которых параллельно умножаются пары блочных матриц.

В обозначениях

$$R_k=\begin{pmatrix} D_k\\ D_{k-1}\end{pmatrix},\ \tilde{A}_i=\begin{pmatrix} A_i & B_i\\ I & 0\end{pmatrix},\ R_1=\begin{pmatrix} D_1\\ D_0\end{pmatrix}.$$

равенство (10) принимает вид

$$R_k=\left(\prod_{i=1}^{k-1}\tilde{A}_i\right)\cdot R_1$$

или

$$R_k=\tilde{A}_{k-1}\cdot\tilde{A}_{k-2}\cdot\ldots\cdot\tilde{A}_3\cdot\tilde{A}_2\cdot R_1.$$

Время максимально параллельного вычисления (10) составляет [2]:

$$T(R)=O\left(log_2^2 n\right),$$

где $R=O(4n^3)$ означает количество процессорных элементов.

Принимая во внимание, что блоки умножаемых матриц имеют треугольную структуру и нулевые строки, указанная оценка достигается на $R < 2\left(n^2 + 2n + 2\right)$ процессоров [2]. Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** Коэффициенты полинома (4) явно выражаются через элементы матрицы (2) в форме (8), из которой их значение вычисляется параллельно с временной сложностью $T\left(n^2 + 2n + 2\right) = O\left(log_2^2 n\right)$.

Описанный алгоритм без принципиальных изменений сохраняется для несимметричных трехдиагональных матриц [3,4]. Он также может быть распространен на случай симметричных матриц общего вида, исходя из того, что любая невырожденная симметричная матрица может быть конструктивно преобразована к трехдиагональной форме [4].

После того, как найдены все коэффициенты, для приближенного вычисления корней полинома можно воспользоваться схемой на основе сортировки, изложенной в [6,7], в которой с помощью матриц сравнения [8] при выполнении модифицированного слияния достигается максимальный параллелизм, устойчивость, прямая и обратная адресация к входным и выходным индексам.

Программная реализация алгоритма осуществлена в среде Delphi 7. В частности, например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

результатом работы программы будут коэффициенты характеристического полинома: –1, 5, 6, –38, –5, 33, а также собственные числа:

2,99999999999999E-0000, –1,00000000000000E-0000,
4,46410161537878E-0000, 1,00000000000000E-0000,
–2,46410161537878E-0000.

Листинг программы идентификации корней характеристического полинома матрицы общего вида с учетом кратности, программный и численный эксперимент описаны в [9] и здесь использованы с точностью до способа формирования коэффициентов характеристического полинома матрицы.

Параллельная схема развертывания характеристического полинома отличается от известных по построению, явным выражением коэффициентов полинома через элементы матрицы и сокращенным числом процессоров по сравнению со случаем матрицы общего вида: $T\left(n^2\right) = O\left(log_2^2 n\right)$.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука. – 1975. – 335 с.
2. *Ромм Я.Е., Богданенко Е.Н.* Параллельное решение проблемы собственных значений для трехдиагональных матриц // Составляющие научно-технического прогресса. Сб-к материалов 4-й Международной научно-практической конференции. – Тамбов. – 2008. – С. 96-104.
3. *Ромм Я.Е., Богданенко Е.Н.* Параллельная итерационная схема нахождения собственных значений трехдиагональных матриц // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: сб. науч. статей VII Международной научно-технической конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2007. – С. 84-87.

4. *Ромм Я.Е., Богданенко Е.Н.* Параллельные итерационные схемы нахождения собственных значений трехдиагональных матриц – Таганрог. госуд. педагогич. ин-т. – Таганрог. – 2007. – 23 с. – Деп. В ВИНИТИ 07.11.07, №1029.
5. *Ромм Я.Е., Богданенко Е.Н.* Параллельное решение проблемы собственных значений для трехдиагональных матриц. // Вторая Международная научная конференция «Суперкомпьютерные системы и их применение SSA' 2008». – Минск. – ОИПИ НАН Беларуси. – 2008. – С. 286-290.
6. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. I // Кибернетика и системный анализ. – Киев. – 2007. – № 1. – С. 165-182.
7. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. – Киев. – 2007. – № 2. – С. 161-174.
8. *Ромм Я.Е.* Параллельная сортировка слиянием по матрицам сравнений. I // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 5. – С. 3-23.
9. *Веселая А.А.* Вычисление нулей и экстремумов функций при вариации параметров на основе сортировки с приложением к моделированию устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. – Таганрог, 2009. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. – 19 с.

**Богданенко Елена Николаевна**
ГОУВПО «Таганрогский государственный педагогический институт».
E-mail: bogdanenko_elena@mail.ru.
347924, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48.
Тел.: +79514983082.

**Bogdanenko Helena Nickolaevna**
GOUVPO the «Taganrog state pedagogical college».
E-mail: bogdanenko_elena@mail.ru.
48, Initiative street, Taganrog, 347924, Russia.
Phone: +79514983082.

УДК 621.396.965.621.391.26

**Е.А. Самойличенко**

# ОСОБЕННОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ЭХО-СИГНАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ГИДРОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ МОНИТОРИНГА ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

*В статье рассматривается вопрос предварительной обработки эхо-сигналов информационной системой мониторинга движущихся объектов на базе ГЛ. Приводится алгоритм удаления реверберационных помех и собственных шумов водоёма и описывается влияние параметров алгоритма на результаты его работы.*

*Гидролокатор; эхо-сигналы; гидролого-акустическая обстановка; движущиеся объекты; информационная система; предварительная обработка сигналов; обнаружение объектов; подавление помех; реверберационные помехи.*

**E.A. Samoylichenko**

# FEATURES OF PRE-PROCESSING OF THE SONAR ECHO SIGNALS IN AN INFORMATION SYSTEM FOR MONITORING MOVING OBJECTS

*The article examines pretreatment echo information system for monitoring moving objects based on the sonar. The article gives an algorithm for removing reverberation noise and intrinsic noise of the reservoir and the influence of the parameters of the algorithm on the result of his work.*

*Sonar, echo-signals; moving objects; information system; signal pre-processing; object detection; noise suppression; reverberation noise.*