Раздел I. Теоретические аспекты математического моделирования

УДК 519.61

А.И. Сухинов, А.В. Шишеня

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА γ_1 ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Получена улучшенная оценка параметра γ_1 для попеременно-треугольного метода за счет отдельного рассмотрения диагональной составляющей матрицы задачи. Приведены математические выкладки и результаты численных экспериментов в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а также в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона с линейной функцией источника вида $qu(x)$.

Численные методы; итерационные методы; попеременно-треугольный метод; уравнение Пуассона.

A.V. Shishenya, A.I. Suchinov

IMPROVEMENT ETIMATION OF γ_1 FOR SSOR WITH A PRIORI INFORMATION

In the article γ_1 parameter estimation was improved at the expense of separate analyzing of diagonal component of the matrix. Calculations and results of numerical experiments for Dirichlet problem of Poisson equation and Poisson equation with linear source function of $qu(x)$ kind are given in the article.

Calculus of approximations; iteration method; SSOR; Poisson equation.

Численное решение дифференциальных уравнений математической физики методом конечных разностей проводится в два этапа. На первом осуществляется разностная аппроксимация дифференциального уравнения на сетке – написание разностной схемы, на втором – решение разностных уравнений, которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка специального вида. Матрица этой системы, как правило, плохо обусловлена и обладает ленточной структурой. Для решения таких уравнений разработаны специальные методы. В случае итерационных методов учет структуры матрицы задачи при выборе переобусловливателя позволяет ускорить сходимость процесса. Учет диагональной составляющей матрицы позволяет улучшить оценки для априорной информации и тем самым улучшить сходимость метода.

Рассмотрим попеременно-треугольный метод решения уравнения

$$Ax = f \tag{1}$$

с симметричной положительно определенной матрицей $A = A^* > 0$ вида $A = \alpha E + \tilde{A}$, где $\tilde{A} = R + R^*$, $\alpha \geq 0$,

$$\begin{cases} B\dfrac{y^{k+1} - y^k}{\tau_{k+1}} + Ay^k = f, \\ y_0 = v, \end{cases} \tag{2}$$

где матрица переобусловливателя имеет вид:

$$B = \left(E + \omega\left(\frac{\alpha}{2}E + R\right)\right)\left(E + \omega\left(\frac{\alpha}{2}E + R^*\right)\right) = \left(E\left(1 + \omega\frac{\alpha}{2}\right) + \omega R\right)\left(E\left(1 + \omega\frac{\alpha}{2}\right) + \omega R^*\right). \tag{3}$$

Обычно априорная информация для ПТМ задаётся в виде постоянных $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\Delta}$ из неравенств

$$\tilde{\delta}E \leq A, \ UU^* \leq \frac{\tilde{\Delta}}{4}A, \text{ где } A = U + U^*,$$

где U – верхнетреугольная часть матрицы A, однако в нашем случае зададим априорную информацию константами δ и Δ,
где

$$\delta E \leq \tilde{A}, \ RR^* \leq \frac{\Delta}{4}\tilde{A}, \tag{4}$$

Здесь в качестве δ и Δ можно взять максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\tilde{A}$, тогда получим:

$$(\delta + \alpha)E \leq A, \tag{5}$$

$$RR^* + \frac{\alpha\Delta}{4}E \leq \frac{\Delta}{4}A. \tag{6}$$

Для нахождения оптимального значения параметра ω метода необходимо оценить γ_1 и γ_2 из неравенств

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B. \tag{7}$$

Оценка сверху является неулучшаемой и не требует априорной информации:

$$B(\omega) - B(-\omega) = (I + \omega U)(I + \omega U)^* - (I - \omega U)(I - \omega U)^* = 2\omega A,$$
$$B(-\omega) \geq 0,$$
$$B(\omega) = B(-\omega) + 2\omega A \geq 2\omega A.$$

То есть оценка сверху имеет вид

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega}. \tag{8}$$

Получим теперь оценку снизу. Воспользуемся неравенством (6):

$$B(\omega)=\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)^2 E+\omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)\left(R+R^*\right)+\omega^2 RR^* =$$

$$=\left(\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)^2-\omega\alpha\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)-\omega^2\frac{\alpha\Delta}{4}\right)E+\omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)\left(\tilde{A}+\alpha E\right)+\omega^2\left(RR^*+\frac{\alpha\Delta}{4}E\right)\le$$

$$\le\left(1-\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\right)E+\omega\left(1+\omega\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta}{4}\right)\right)A.$$

Рассмотрим теперь два случая в зависимости от области изменения параметра ω.

Пусть $\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\le 1$. Воспользуемся неравенством (5):

$$B\le\left(1-\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\right)E+\omega\left(1+\omega\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta}{4}\right)\right)A\le\left(\left(1-\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\right)\frac{1}{\delta+\alpha}+\omega\left(1+\omega\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta}{4}\right)\right)\right)A.$$

Или после преобразования

$$B\le\left(\frac{1}{\delta+\alpha}+\omega+\frac{\omega^2}{4}\left(\delta+\alpha+\frac{\delta(\Delta-\delta)}{\delta+\alpha}\right)\right)A.$$

То есть оценка снизу имеет вид

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\delta+\alpha}+\omega+\frac{\omega^2}{4}\left(\delta+\alpha+\frac{\delta(\Delta-\delta)}{\delta+\alpha}\right)\right)^{-1}. \qquad (9)$$

Пусть $\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\ge 1$. Воспользуемся неравенством $(\Delta+\alpha)E\ge A$:

$$B\le\left(1-\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\right)E+\omega\left(1+\omega\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta}{4}\right)\right)A\le$$

$$\le\left(\left(1-\omega^2\frac{\alpha}{4}(\alpha+\Delta)\right)\frac{1}{\alpha+\Delta}+\omega\left(1+\omega\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta}{4}\right)\right)\right)A=$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha+\Delta}+\omega+\frac{\omega^2}{4}(\alpha+\Delta)\right)A.$$

То есть оценка снизу имеет вид

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\alpha+\Delta}+\omega+\frac{\omega^2}{4}(\alpha+\Delta)\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Итерационный параметр ω найдём из следующего условия:

$$f(\omega)=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\to\min.$$

Рассмотрим функцию $f(\omega)$ на промежутке $\omega \le \dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}$. Она убывает при $\omega \le \min\left(\dfrac{2}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha\delta+\delta\Delta)}}, \dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}\right)$.

Далее будет показано, что в реальных задачах $\dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}} \le \dfrac{2}{\sqrt{(\alpha^2+2\alpha\delta+\delta\Delta)}}$.

Функция $f(\omega)$ на промежутке $\omega \ge \dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}$ возрастает при $\omega \ge \max\left(\dfrac{2}{\alpha+\Delta}, \dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}$. Таким образом, функция $f(\omega)$ достигает минимума при

$$\omega^* = \frac{2}{\sqrt{\alpha(\alpha+\Delta)}}. \tag{11}$$

$$\gamma_1\left(\omega^*\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-2}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\eta\left(\omega^*\right)} = f\left(\omega^*\right) = \frac{1}{2\omega^*\left(\alpha+\Delta\right)} + \frac{1}{2} + \frac{\omega^*}{8}(\alpha+\Delta) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\Delta}{\alpha}}} + \sqrt{1+\frac{\Delta}{\alpha}}\right) + \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Замечание. Для классических оценок параметров попеременно-треугольного метода имеет место равенство

$$\frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\Delta+\alpha}{\delta+\alpha}} + \sqrt{\frac{\delta+\alpha}{\Delta+\alpha}}\right) + \frac{1}{2}. \tag{14}$$

И, хотя в общем случае неравенство $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} \le \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1}$ выполняется не всегда, но на практике величина (13) часто оказывается меньше.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с линейной функцией источника:

$$qu = \Delta u + f,$$

$$u\big|_\gamma = \mu,$$

где $q = const$, тогда аппроксимация этого уравнения конечными разностями имеет вид

$$qy_i = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_y^2} + f_{i,j}, \quad (i,j) \in \omega_h,$$
$$y_{i,j} = \mu_{i,j}, \quad (i,j) \in \gamma_h. \tag{15}$$

Здесь $A = qE + \widetilde{A}$, $\widetilde{A} = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где Λ_1, Λ_2 – матрицы операторов вторых разностных производных по x и y соответственно. В этом случае априорная информация имеет вид

$$\delta = \frac{4}{h_x^2}\sin^2\left(\frac{\pi h_x}{2}\right) + \frac{4}{h_y^2}\sin^2\left(\frac{\pi h_y}{2}\right),$$
$$\Delta = \frac{4}{h_x^2}\cos^2\left(\frac{\pi h_x}{2}\right) + \frac{4}{h_y^2}\cos^2\left(\frac{\pi h_y}{2}\right). \tag{16}$$

При разностной аппроксимации задач, в частности задач теплопроводности неявными схемами, условие устойчивости налагает на функцию источника ограничение вида

$$q = O\left(\frac{1}{\|h\|}\right).$$

Учтем этот факт и при проведении численного эксперимента. Предположим, что $q = \dfrac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$.

Далее приведена таблица зависимости числа узлов от количества итераций.

Количество узлов по каждому направлению	Количество итераций (стандартная нижняя оценка для ПТМ) n_1	Количество итераций (улучшенная нижняя оценка для ПТМ) n_2	Ускорение n_1/n_2
10	18	15	1.2
20	32	26	1.2
30	45	33	1.4
40	57	39	1.5
50	68	44	1.5
60	79	49	1.6
70	88	54	1.6
80	97	58	1.7
90	106	63	1.7
100	114	67	1.7

Идея выделения диагональной составляющей матрицы с целью улучшения оценок параметров метода может быть применена и в случае, когда явно такая составляющая отсутствует. Представим матрицу A системы (1) в виде $A = \alpha E + \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = A - \alpha E$, $\widetilde{A} \geq 0$. Пусть $\widetilde{A} = R + R^*$, где R – верхнетреугольная часть матрицы $\widetilde{A}$. Если для матрицы A выполняются неравенства $\delta E \leq A \leq \Delta E$, то

$$(\delta-\alpha)E \le \tilde{A} \le (\Delta-\alpha)E\,,\ \alpha\le\delta\,, \tag{17}$$

$$RR^* + \alpha\frac{\Delta-\alpha}{4}E \le \frac{(\Delta-\alpha)}{4}A, \tag{18}$$

т.е. $(\delta-\alpha)$ и $(\Delta-\alpha)$ – максимальное и минимальное собственные значения оператора $\tilde{A}$. Оценка для γ_2 даётся формулой (8). Оценим γ_1:

$$B(\omega) = \left(E+\omega\left(\frac{\alpha}{2}E+R\right)\right)\left(E+\omega\left(\frac{\alpha}{2}E+R^*\right)\right) =$$

$$= E\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)\left(R+R^*\right)+\omega^2 RR^* =$$

$$= E\left(1-\alpha\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)+\omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)\left(R+R^*+\alpha E\right)+\omega^2\left(RR^*+\alpha\frac{\Delta-\alpha}{4}E\right).$$

Рассмотрим случай, когда $1-\alpha\omega^2\frac{\Delta}{4}\le 0$. Используем неравенство $\Delta E \ge A$:

$$B(\omega) = E\left(1-\alpha\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)+\omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)\left(R+R^*+\alpha E\right)+\omega^2\left(RR^*+\alpha\frac{\Delta-\alpha}{4}E\right)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{\Delta}\left(1-\alpha\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)+\omega\left(1+\omega\frac{\alpha}{2}\right)+\omega^2\frac{\Delta-\alpha}{4}\right)A = \left(\frac{1}{\Delta}-\omega^2\frac{\alpha}{4}+\omega+\omega^2\frac{\alpha}{2}+\omega^2\frac{\Delta}{4}-\omega^2\frac{\alpha}{4}\right)A =$$

$$=\left(\frac{1}{\Delta}+\omega+\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)A.$$

В этом случае

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{\Delta}+\omega+\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)^{-1}. \tag{19}$$

Обычная оценка имеет вид $\tilde{\gamma}_1 = \left(\frac{1}{\delta}+\omega+\omega^2\frac{\Delta}{4}\right)^{-1}$. Очевидно, $\gamma_1 \ge \tilde{\gamma}_1$, т.е. полученная оценка лучше. Оптимальный параметр ω получим из условия

$$f(\omega) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \to \min.$$

На промежутке $\omega \ge \frac{2}{\sqrt{\alpha\Delta}}$ функция $f(\omega)$ имеет вид $f(\omega) = \frac{1}{2\omega\Delta}+\frac{1}{2}+\frac{\omega\Delta}{8}$ и достигает минимума в $\omega = \frac{2}{\sqrt{\alpha\Delta}}$.

Положим $\omega^* = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha\Delta}}$, тогда запишем:

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\Delta}} + \frac{1}{\alpha}\right)^{-1},\ \gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha\Delta}}{4},$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}}\right) + \frac{1}{2},$$

$$\min_{0\le\alpha\le\delta} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}\right) + \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \alpha = \delta,$$

$$\eta(\omega^*) = \frac{4}{\sqrt{\xi} + \dfrac{1}{\sqrt{\xi}} + 2}, \tag{20}$$

где $\xi = \dfrac{\delta}{\Delta}$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{\xi}} + \sqrt{\xi} + 6}{\sqrt{\dfrac{1}{\xi}} + \sqrt{\xi} - 2} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{\xi}} + \sqrt{\xi} - 2 + 8}{\sqrt{\dfrac{1}{\xi}} + \sqrt{\xi} - 2} = 1 + \frac{8}{\sqrt{\dfrac{1}{\xi}} + \sqrt{\xi} - 2}. \tag{21}$$

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} &\Delta u = -f, \\ &u|_\gamma = \mu. \end{aligned} \tag{22}$$

После дискретизации получим сеточное уравнение:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_y^2} = -f_{i,j}, \quad (i,j)\in\omega_h, \\ &y_{i,j} = \mu_{i,j}, \quad (i,j)\in\gamma_h. \end{aligned} \tag{23}$$

Оценим количество итераций, необходимых для решения полученного СЛАУ, с точностью ε.

Пусть $\delta = \dfrac{8}{h^2}\sin^2\left(\dfrac{\pi h}{2}\right)$, $\Delta = \dfrac{8}{h^2}\cos^2\left(\dfrac{\pi h}{2}\right)$, тогда $\xi = tg^2\left(\dfrac{\pi h}{2}\right) \cong \dfrac{\pi^2}{4}h^2$, и согласно (21) имеем:

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \frac{8}{\dfrac{2}{\pi h} + \dfrac{\pi h}{2} - 2} = 1 + \frac{8h}{\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi h^2}{2} - 2h},$$

$$\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \cong 4\pi h.$$

Итак, требуемое число итераций равно $n_0(\varepsilon) \cong \dfrac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{4\pi h}$. Для сравнения количество итераций в случае обычных оценок равно $\tilde{n}_0(\varepsilon) \cong \dfrac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{2\pi h}$, т.е. улучшение оценки позволяет сократить число итераций в 2 раза, что подтверждается численными экспериментами.

Далее приведена таблица зависимости числа узлов от количества итераций.

Количество узлов по каждому направлению	Количество итераций (стандартная оценка $\tilde{\gamma}_1$) n_1	Количество итераций (улучшенная оценка γ_1) n_2	Ускорение n_1/n_2
10	20	12	1.7
20	41	23	1.8
30	64	34	1.9
40	87	46	1.9
50	111	58	1.9
60	135	70	1.9
70	161	83	1.9
80	186	96	1.9
90	212	109	1.9
100	239	122	2.0

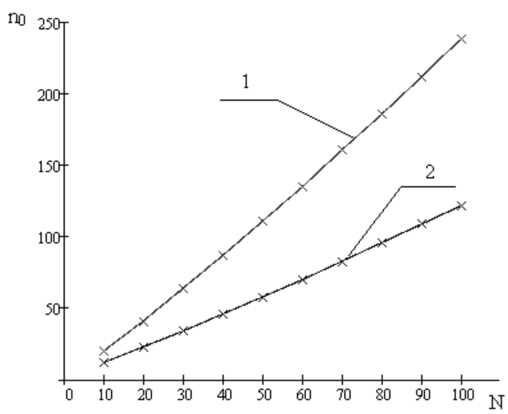

Рис. 1. Количество итераций, необходимых для решения сеточных уравнений попеременно-треугольным методом при использовании стандартной оценки $\tilde{\gamma}_1$: 1 – улучшенной оценки γ_1 ; 2 – в зависимости от числа узлов сетки

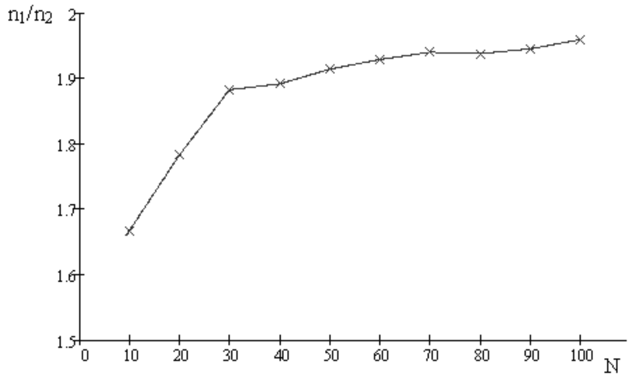

Рис. 2. График, показывающий во сколько раз меньше итераций необходимо при использовании улучшенной оценки γ_1 *по сравнению со стандартной* $\tilde{\gamma}_1$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. Май-июнь, 2002. – Т. 43. № 3. – С. 552-572.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Шишеня Александр Владимирович

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

Тел.: 8928322282; +79081761837.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

Shishenya Alexander Vladimirovich

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

Phone: 8928322282; +79081761837.