Заметим, что аппроксимации производных $\left\langle e'_x \right\rangle_{i,j}^{(2)}$, $\left\langle e'_y \right\rangle_{i,j}^{(2)}$ можно определить и следующим образом $\left\langle e'_\chi \right\rangle_{i,j}^{(2)} = \left\langle He'_\chi \Delta \right\rangle_{i,j}^{(2)} \Big/ \left(\overline{H}_{i,j} \Delta_{i,j}\right)$. Это не препятствует знакоопределенности оператора уравнения для возвышения уровня e, но метрические соотношения не выполняются, в том числе и $x'_x = y'_y = 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васильев В.С.* Аппроксимации в системах уравнений мелкой воды на криволинейных сетках // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2007. – № 2 (77). – С. 135-141.
2. *Вольцингер Н.Е.*, *Клеванный К.А.*, *Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.
3. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. – СПб.: Наука, 1991. – 200 с.
4. *Agoshkov V.I.*, *Saleri F.* Recent Developments in the Numerical Simulation of Shallow Water Equations. III – Boundary Conditions and Finite Element Approximations in the River Flow Calculations // Матем. Моделирование. – 1996. – Т. 8, № 9. – С. 3-24.

Васильев Владислав Сергеевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: nvn@vm.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

Vasiliev Vladislav Sergeevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: nvn@vm.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371606.

УДК 551.594

А.А. Редин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНОГО ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ОДНО- И ДВУКРАТНО ЗАРЯЖЕННОГО АЭРОЗОЛЯ

В работе построена модель электрического состояния нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом одно- и двукратно заряженного аэрозоля.

Приземный слой; аэрозоль; ионы; турбулентное перемешивание; электродный эффект; электрическое поле.

A.A. Redin

ELECTRODYNAMIC MATHEMATICAL MODEL OF THE ATMOSPHERIC SURFACE LAYER WITH ONE- AND DOUBLE-CHARGED AEROSOLS

The model of non-stationary horizontally similar surface layer with single- and double-charged aerosols is developed in this paper.

Surface layer; aerosol; ions; turbulent mixing; electrode effect; electric field.

Введение. В работе [1] построена модель электрического состояния нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом однократно заряженного аэрозоля. Модельные расчеты показали, что при малых концентрациях аэрозольных частиц $(N \leq 5\cdot 10^{8} м^{-3})$ результаты совпадают с турбулентным электродным эффектом в чистой атмосфере, а при достаточно больших концентрациях аэрозольных частиц ($N \geq 10^{10}$ $м^{-3}$) в атмосфере электрическое состояние приземного слоя определяется только тяжелыми ионами, образовавшимися за счет взаимодействия аэрозоля с легкими ионами, что хорошо согласуется с [2].

В работе [2] приведена оценка влияния многократно заряженных аэрозольных частиц на распределение электрических характеристик в приземном слое атмосферы, из которой следует, что основной вклад в величину объемного заряда вносит одно- и двукратно заряженные тяжелые ионы, образовавшиеся за счет воссоединения аэрозольных частиц с аэроионами.

Целью данной работы является построение модели электрического состояния нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом одно- и двукратно заряженного аэрозоля.

Постановка задачи моделирования. Для нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом одно- и двукратно заряженного аэрозоля система уравнений, описывающих его электрическое состояние в приближении турбулентного электродного эффекта, приобретает вид:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \mathrm{n}_{1,2}}{\partial \mathrm{t}} \pm \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\mathrm{b}_{1,2}\cdot \mathrm{E}\cdot \mathrm{n}_{1,2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\mathrm{D}_{\mathrm{T}}(\mathrm{z})\cdot \dfrac{\partial \mathrm{n}_{1,2}}{\partial \mathrm{z}}\right) = & \text{(a)} \\
= \mathrm{q} - \alpha\cdot \mathrm{n}_1\cdot \mathrm{n}_2 - n_{1,2}\Phi_{1,2}, & \\
\Phi_1 = \beta_{11}^{(0)}N_0 + \beta_{11}^{(1)}N_1^{(1)} + \beta_{12}^{(1)}N_2^{(1)} + \beta_{12}^{(2)}N_2^{(2)}, & \\
\Phi_2 = \beta_{22}^{(0)}N_0 + \beta_{22}^{(1)}N_2^{(1)} + \beta_{21}^{(1)}N_1^{(1)} + \beta_{21}^{(2)}N_1^{(2)}, & \\
\beta_{22}^{(0)}N_0\mathrm{n}_2 - \beta_{12}^{(1)}N_2^{(1)}\mathrm{n}_1 = 0, & \text{(b)} \\
\beta_{11}^{(0)}N_0\mathrm{n}_1 - \beta_{21}^{(1)}N_1^{(1)}\mathrm{n}_2 = 0, & \\
\mathrm{n}_1\beta_{11}^{(0)}N_0 - n_2\left(\beta_{22}^{(1)}N_2^{(1)} + \beta_{21}^{(1)}N_1^{(1)} + \beta_{21}^{(2)}N_1^{(2)}\right) = 0, & \text{(c)} \\
\mathrm{n}_2\beta_{22}^{(0)}N_0 - n_1\left(\beta_{11}^{(1)}N_1^{(1)} + \beta_{12}^{(1)}N_2^{(1)} + \beta_{12}^{(2)}N_2^{(2)}\right) = 0, & \text{(d)} \\
\dfrac{dE}{dz} = \dfrac{e}{\varepsilon_0}\left(n_1 - n_2 + N_1^{(1)} - N_2^{(1)} + 2\left(N_1^{(2)} - N_2^{(2)}\right)\right), & \\
N = N_0 + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + N_1^{(2)} + N_2^{(2)}, & \text{(e)}
\end{array}\right. \tag{1}$$

где (a) – ионизационно-рекомбинационные уравнения, в правой части которых добавлены слагаемые, описывающие процесс взаимодействия аэроионов с одно- и двукратно заряженными аэрозолями, а также с образовавшимися нейтральными частицами, (c) – уравнения баланса двукратно заряженных аэрозолей, которые усилены уравнениями баланса (b) однократно заряженного аэрозоля. Также в уравнениях для напряженности электрического поля (d) и общей концентрации аэрозольных частиц (e) появляются слагаемые, учитывающие вклад одно- и двукратно заряженного аэрозоля на электродинамическую структуру приземного слоя атмосферы.

Характерные значения основных параметров системы (1) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Название	Значение
E	Напряженность электрического поля	$\sim 10^2\ В\,м^{-1}$
b_1	Подвижность положительных легких ионов	$1{,}2\cdot10^{-4}\ м^2 В^{-1} с^{-1}$
b_2	Подвижность отрицательных легких ионов	$1{,}4\cdot10^{-4}\ м^2 В^{-1} с^{-1}$
η_1	Коэффициент взаимодействия легких ионов с заряженными ядрами	$1{,}4\cdot10^{-12}\ м^3 с^{-1}$
η_2	Коэффициент взаимодействия легких ионов с нейтральными тяжелыми ядрами	$4\cdot10^{-12}\ м^3 с^{-1}$
α	Коэффициент рекомбинации легких ионов	$1{,}6\cdot10^{-12}\ м^3 с^{-1}$
z_0	Параметр шероховатости земной поверхности	$2{,}5\cdot10^{-3}\ м$
e	Элементарный заряд	$1{,}6\cdot10^{-19}\ Кл$
ε_0	Электрическая постоянная	$8{,}85\cdot10^{-12}\ Ф/м$
z_0	Параметр шероховатости земной поверхности	$2{,}5\cdot10^{-3}\ м$
$n_{1,2}$	Объемная концентрация положительных и отрицательных легких ионов	$\sim\left(10^8-10^9\right) м^{-3}$
$N_{0,1,2}$	Объемная концентрация нейтральных, положительных и отрицательных тяжелых ионов, соответственно	$\sim\left(10^8-10^{10}\right) м^{-3}$
D_1	Множитель в коэффициенте турбулентной диффузии легких ионов	$\left(0{,}01-0{,}1\right) м\ \ с^{-1}$
q	Интенсивность ионообразования	$\sim\left(10^6-10^7\right) м^{-3} с^{-1}$
D_2	Множитель в коэффициенте турбулентной диффузии для тяжелых ионов	$\left(0{,}01-0{,}1\right) м\ \ с^{-1}$
β_{ij}^k	Коэффициенты взаимодействия легких ионов с аэрозольными частицами	
k	Число элементарных зарядов на аэрозольной частице	

Рассмотрим аэрозольные частицы с характерными размерами $r = 0{,}02\ мкм$ и $r = 0{,}1\ мкм$. Предположим, что в диапазоне размеров аэрозольных частиц $r = 0{,}02\ мкм$ максимальное значение $k = 2$ [3].

Для равновесного состояния имеем [3]:

$$N_1^{(1)} = N_0\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\frac{\beta_{11}^{(0)}}{\beta_{21}^{(1)}},\quad N_1^{(2)} = N_0\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\frac{\beta_{11}^{(0)}\beta_{11}^{(1)}}{\beta_{21}^{(1)}\beta_{21}^{(2)}},$$
$$N_2^{(1)} = N_0\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\frac{\beta_{22}^{(0)}}{\beta_{12}^{(1)}},\quad N_2^{(2)} = N_0\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\frac{\beta_{22}^{(0)}\beta_{22}^{(1)}}{\beta_{12}^{(1)}\beta_{12}^{(2)}}. \qquad (2)$$

Учитывая то, что при развитом турбулентном перемешивании профили n_1 и n_2 сближаются, положим в (2) $n_1 \approx n_2$. Тогда получим:

$$\begin{gathered} \mathrm{N}_1^{(1)} - \mathrm{N}_2^{(1)} = \mathrm{N}_0\left(\frac{\beta_{11}^{(0)}}{\beta_{21}^{(1)}} - \frac{\beta_{22}^{(0)}}{\beta_{12}^{(1)}}\right), \\ \mathrm{N}_1^{(2)} - \mathrm{N}_2^{(2)} = \mathrm{N}_0\left(\frac{\beta_{11}^{(0)}\beta_{11}^{(1)}}{\beta_{21}^{(1)}\beta_{21}^{(2)}} - \frac{\beta_{22}^{(0)}\beta_{22}^{(1)}}{\beta_{21}^{(1)}\beta_{12}^{(1)}}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Используя результаты расчетов Φ_1 и Φ_2 из работы [4], получаем:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = 0.868\cdot 10^{-12}\cdot N, && \Phi_2 = 0.872\cdot 10^{-12}\cdot N, \quad N = 1.672\cdot N_0, \\ &\beta_{11}^{(0)} = 0.584\cdot 10^{-12}\cdot N, && \beta_{22}^{(0)} = 0.773\cdot 10^{-12}\cdot N, \\ &\beta_{11}^{(1)} = 0.119\cdot 10^{-12}\cdot N, && \beta_{22}^{(1)} = 0.156\cdot 10^{-12}\cdot N, \\ &\beta_{12}^{(1)} = 1.89\cdot 10^{-12}\cdot N, && \beta_{21}^{(1)} = 2.46\cdot 10^{-12}\cdot N, \\ &\beta_{12}^{(2)} = 4.0\cdot 10^{-12}\cdot N, && \beta_{21}^{(2)} = 5.00\cdot 10^{-12}\cdot N, \end{aligned} \tag{4}$$

подставляя эти значения в (3) получаем:

$$N_1^{(1)} - N_2^{(1)} = -0{,}17N_0,\ N_1^{(2)} - N_2^{(2)} = -0{,}01N_0. \tag{5}$$

Применяя аналогичную методику расчетов для случая $r = 0{,}1\ \text{мкм}$ и предельного заряда на аэрозольных частицах *5e,* можно получить

$$\Phi_1 = 4{,}72\cdot 10^{-12},\ \Phi_2 = 4{,}7\cdot 10^{-12},\ N = 3{,}52\cdot N_0. \tag{6}$$

Плотность электрического заряда ρ в уравнении Пуассона будет равна:

$$\begin{gathered} \rho = 4\pi e\big[\ (n_1 - n_2) + \left(N_1^{(1)} - N_2^{(1)}\right) + 2\left(N_1^{(2)} - N_2^{(2)}\right) + \\ + 3\left(N_1^{(3)} - N_2^{(3)}\right) + 4\left(N_1^{(4)} - N_2^{(4)}\right) + 5\left(N_1^{(5)} - N_2^{(5)}\right)\ \big] \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}_1^{(1)} - \mathrm{N}_2^{(1)} = -0.239\cdot\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1^{(2)} - \mathrm{N}_2^{(2)} = -0.225\cdot\mathrm{N}_0, \\ &\mathrm{N}_1^{(3)} - \mathrm{N}_2^{(3)} = -0.095\cdot\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1^{(4)} - \mathrm{N}_2^{(4)} = -0.0288\cdot\mathrm{N}_0, \\ &\mathrm{N}_1^{(5)} - \mathrm{N}_2^{(5)} = -0.0026\cdot\mathrm{N}_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из полученных результатов видно, что вклад в величину ρ аэрозольных частиц с зарядом от 3 до *5e* почти на порядок меньше, чем одно - и двукратно заряженного аэрозоля.

Численная схема решения и ее устойчивость. Для численного решения системы уравнений (1) вводилась сетка по переменной z с шагом h: $\Omega_h = \{z_i = z_0 + ih,\ i = 0{,}1{,}2 \ldots N, hN = l\}$,

$\omega_h = \left\{ z_i = z_0 + ih,\ i = 1,2...N-1, hN = l \right\}$ и по переменной t с шагом τ: $\omega_\tau = \left\{ t_n = n\tau,\ n = 0,1,2...K, K\tau = T \right\}$.

Для записи системы уравнений (1) в конечно-разностном виде использовалось однопараметрическое семейство схем с весами [5].

Произвольный действительный параметр σ задавался такой, что при $\sigma = 0$ получаем явную схему, при $\sigma = 1$ – чисто неявную схему и при $\sigma = 0{,}5$ – симметричную схему. При использовании 6 точечного шаблона осуществлялся переход от непрерывной задачи (1) к дискретной, которая в индексной форме выглядит следующим образом:

$$\frac{\left(n_{1,2}\right)_i^{k+1} - \left(n_{1,2}\right)_i^k}{\tau} + \sigma\left(\pm b_{1,2} \frac{E_{i+1}^{k+1}\left(n_{1,2}\right)_{i+1}^{k+1} - E_{i-1}^{k+1}\left(n_{1,2}\right)_{i-1}^{k+1}}{2h} - \left(D_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(\frac{\left(n_{1,2}\right)_{i+1}^{k+1} - \left(n_{1,2}\right)_i^{k+1}}{h^2} \right) - D_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}\left(\frac{\left(n_{1,2}\right)_i^{k+1} - \left(n_{1,2}\right)_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right) \right) \right) +$$

$$+\alpha \cdot \left(n_1\right)_i^{k+1} \cdot \left(n_2\right)_i^{k+1} + \left(n_{1,2}\right)_i^{k+1} \cdot \left(\beta_{11}^{(0)}\left(N_0\right)_i^{k+1} + \beta_{11}^{(1)}\left(N_1^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{12}^{(1)}\left(N_2^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{12}^{(2)}\left(N_2^{(2)}\right)_i^{k+1} \right) \Big) +$$

$$+\left(1-\sigma\right)\left(b_1 \frac{E_{i+1}^{k}\left(n_{1,2}\right)_{i+1}^{k} - E_{i-1}^{k}\left(n_{1,2}\right)_{i-1}^{k}}{2h} - \left(D_{i+\frac{1}{2}}^{k}\left(\frac{\left(n_{1,2}\right)_{i+1}^{k} - \left(n_{1,2}\right)_i^{k}}{h^2} \right) - D_{i-\frac{1}{2}}^{k}\left(\frac{\left(n_{1,2}\right)_i^{k} - \left(n_{1,2}\right)_{i-1}^{k}}{h^2} \right) \right) \right) -$$

$$+\alpha \cdot \left(n_1\right)_i^{k} \cdot \left(n_2\right)_i^{k} + \left(n_{1,2}\right)_i^{k} \cdot \left(\beta_{11}^{(0)}\left(N_0\right)_i^{k} + \beta_{11}^{(1)}\left(N_1^{(1)}\right)_i^{k} + \beta_{12}^{(1)}\left(N_2^{(1)}\right)_i^{k} + \beta_{12}^{(2)}\left(N_2^{(2)}\right)_i^{k} \right) \Big) = q_i,$$

$$\frac{E_i^{k+1} - E_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(\left(n_1\right)_i^{k+1} - \left(n_2\right)_i^{k+1} + \left(N_1^{(1)}\right)_i^{k+1} - \left(N_2^{(1)}\right)_i^{k+1} + 2\left(\left(N_1^{(2)}\right)_i^{k+1} - \left(N_2^{(2)}\right)_i^{k+1} \right) \right),$$

$$\beta_{22}^{(0)}\left(N_0\right)_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k+1}}\left(\mathrm{n}_2\right)_i^{k+1} - \beta_{12}^{(1)}\left(N_2^{(1)}\right)_{\mathrm{i}}^{k+1}\left(\mathrm{n}_1\right)_i^{k+1} = 0,$$

$$\beta_{11}^{(0)}\left(N_0\right)_i^{k+1}\left(\mathrm{n}_1\right)_i^{k+1} - \beta_{21}^{(1)}\left(N_1^{(1)}\right)_i^{k+1}\left(\mathrm{n}_2\right)_i^{k+1} = 0,$$

$$\left(\mathrm{n}_1\right)_i^{k+1}\beta_{11}^{(0)}\left(N_0\right)_i^{k+1} - \left(n_2\right)_i^{k+1}\left(\beta_{22}^{(1)}\left(N_2^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{21}^{(1)}\left(N_1^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{21}^{(2)}\left(N_1^{(2)}\right)_i^{k+1} \right) = 0,$$

$$\left(\mathrm{n}_2\right)_i^{k+1}\beta_{22}^{(0)}\left(N_0\right)_i^{k+1} - \left(n_1\right)_i^{k+1}\left(\beta_{11}^{(1)}\left(N_1^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{12}^{(1)}\left(N_2^{(1)}\right)_i^{k+1} + \beta_{12}^{(2)}\left(N_2^{(2)}\right)_i^{k+1} \right) = 0,$$

$$(N_0)_i^{k+1} + (N_1^{(1)})_i^{k+1} + (N_2^{(1)})_i^{k+1} + (N_1^{(2)})_i^{k+1} + (N_2^{(2)})_i^{k+1} = N, \qquad (9)$$

где i – номер шага по высоте, k – номер шага по времени, h – шаг дискретизации по высоте, τ - шаг дискретизации по времени, σ – параметр аппроксимации, $\sigma \in [0,1]$. На каждом шаге по времени уравнения системы (9) рассчитывались последовательно.

Проделав оценки системы (1) аналогично [1], получаем: так как на главной диагонали стоят коэффициенты больше нуля и выполняется условие диагонального преобладания, то оператор положительно определенный. Разностная схема с несамосопряженным, положительно определенным оператором A является абсолютно устойчивой [5] входным данным при $\sigma \geq 0{,}5$.

Трехдиагональный вид для первых двух уравнений системы (9) и выполнение условия диагонального преобладания позволяет решать их методом прогонки [5]. Третье и восьмое уравнения решаются методом последовательных приближений.

В качестве параметров моделирования можно выбирать значение шага дискретизации по расстоянию $h = 0,1 м$ и значение параметра $\sigma = 0,5$. Шаг по времени можно также выбрать равным шагу по дискретизации: $\tau = 0,1\ c$.

Заключение. Таким образом, дополнив систему (1) начальными и граничными условиями вида [2], получим возможность моделировать данные процессы на современных вычислительных средствах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Редин А.А., Клово А.Г., Куповых Г.В., Морозов В.Н.* Электродинамическая модель атмосферного приземного слоя // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск “Актуальные проблемы математического моделирования”. – 2009. – № 8 (97). – С. 93-106.
2. *Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. – Таганрог. Изд-во ТРТУ, 1998. – 123 с.
3. *Куповых Г.В.* Моделирование влияния загрязнений на электрические характеристики приземного слоя атмосферы // Известия ТРТУ. – 2004. – № 5 (40). – С. 259-262.
4. *Куповых Г.В.* Приближение сильного турбулентного перемешивания // Известия ТРТУ. – 1997. – № 2 (5). – С. 194-195.
5. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики // 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

Редин Александр Александрович

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: alexandr_redin@mail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634321617.

Redin Alexander Alexandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: alexandr_redin@mail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634321617.

УДК 518.5.001.57

Е.В. Алексеенко

ПРОЦЕССЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Работа посвящена математическому моделированию процессов турбулентного перемешивания в мелкой воде, а также выбору аппроксимации коэффициентов вертикального турбулентного обмена на основе сравнений с экспедиционными измерениями в лагуне Этан де Бер (Франция). Представлены результаты численного эксперимента для лагуны и их обоснование.

Теория мелкой воды; турбулентный обмен; экспедиционные измерения; пульсации.