УДК 519.63:532.55

А.И. Сухинов, М.Д. Чекина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ ОСАДКОВ С ПОМОЩЬЮ СУПЕРВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Целью данной работы является оценка скоплений дождевой воды и прогнозирование затоплений. Для решения этой задачи построена математическая модель на основе уравнения Сен-Венана. Была осуществлена дискретизация модели и разработан алгоритм её программной реализации. В результате численного исследования динамики затопления модельной области были получены сеточные функции высоты столба жидкости, а также картины динамики затопления области.

Динамика затопления; уравнение Сен-Венана; русловые потоки; фильтрация; параллельный алгоритм.

A.I. Sukhinov, M.D. Chekina

MATHEMATICAL MODELLING OF ACCUMULATION AND FILTRATION DEPOSITS PROCESSES BY MEANS OF SUPERCOMPUTING SYSTEMS

The main purpose of the work is to create an estimation of wastewater gathering and flood forecasting. Mathematical model of the problem is based on Saint-Venant equation. The discretization of the model was made and the algorithm of its numerical simulation was elaborated. The numerical simulation of the model region flooding results in mesh functions of the height of liquid column and picture of region flood dynamics.

Flood dynamics; Saint-Venant equation; channel flow; filtration; parallel algorithm.

Введение. Данная работа посвящена разработке математической модели процессов накопления и фильтрации осадков для прогнозирования затоплений. Для решения этой задачи было использовано уравнение Сен-Венана, связывающее высоту столба воды с потоком, и вспомогательное уравнение, задающее коэффициенты впитывания грунта.

Для оптимизации вычислений разработан параллельный алгоритм с применением модели передачи сообщений (MPI).

Постановка задачи. В данной работе рассматривается распределение осадков в модельной области, показанной на рис. 1.

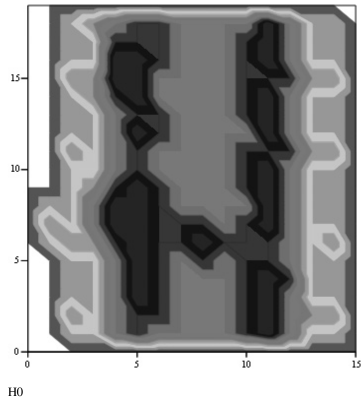

Рис. 1. Модельная область

Ось Ох направим вертикально вверх, ось Оу слева направо. На рис. 1 фиолетовым цветом показана наибольшая глубина, а красным наименьшая.

Для решения этой задачи построим математическую модель на уравнения Сен-Венана [3], которое объединяет глубину H с потоком Q:

$$H'_t = Q'_x + Q'_y - z + f\ , \tag{1}$$

где z – функция, задающая степень впитывания в области (сток), а f – источник, т.е. в нашем случае это количество осадков.

Запишем уравнение, характеризующее впитывание:

$$z'_t = -k_1 z + k_2\ , \tag{2}$$

$$\begin{cases} k_1 > k_2 & H \neq H_0, \\ k_1 = 0 & H = H_0. \end{cases}$$

где k_1 – коэффициент промокания, k_2 – коэффициент, задающий скорость впитывания, H – высота водяного столба, H_0 – естественный уровень воды.

Выражение для потока:

$$Q = \begin{cases} K_1((1+K_2 tg\varphi)^{\beta} - 1), & \varphi \geq \varphi_0 \\ 0, \quad \varphi < \varphi_0 \end{cases} \tag{3}$$

где $tg\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$, φ – угол наклона, K_1, K_2 и β – характеристики текучести жидкости.

Граничные условия задаем в форме Неймана:

$$H'_n = 0\,.$$

Для отыскания решения данной задачи нам необходимо рассмотреть систему (1-3).

Проведем преобразования, выражая поток Q через высоту H, получим

$$H'_t = (K(H)H'_x)'_x + (K(H)H'_y)'_y - z + f\ , \tag{4}$$

где

$$K(H) = \frac{K_1((1+K_2 tg\varphi)^{\beta} - 1)}{tg\varphi}. \tag{5}$$

Итак, в результате нужно рассмотреть систему уравнений (4) и (2).

Дискретизация непрерывной модели. Для получения консервативных разностных схеме естественно исходить из уравнений баланса, записанных для ячеек сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных схем будем называть интегроинтерполяционным методом [1].

Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку:

$$w_h = \left\{ x_i = ih_x, y_i = jh_y; \quad i = \overline{1..N_x}, j = \overline{1..N_y}; \quad N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\}.$$

В уравнении (4) вместо частных производных будем использовать из конечноразностных аналоги, полученные при помощи интегроинтреполяционного метода. В итоге получим следующую разностную схему:

$$H_{ij}^{n+1}\Big(\frac{1}{\tau} + K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2} + K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2} + K^n_{ij+\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_y^2} + K^n_{ij-\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_y^2}\Big) - H_{i+1j}^{n+1} K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2} - \tag{6}$$

$$- K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2} H_{i-1j}^{n+1} - K^n_{ij+\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_y^2} H_{ij+1}^{n+1} - K^n_{ij-\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_y^2} H_{ij-1}^{n+1} = \frac{1}{\tau} H_{ij}^n - z_{ij}^n + f_{ij}^n .$$

Определенную сложность представляет аппроксимация коэффициентов (5). Проведем ее следующим образом:

$$K(H) = \frac{1}{tg\varphi}\beta K_1 \ln(1 + K_2 tg\varphi) = \frac{1}{tg\varphi}\beta K_1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(K_2 tg\varphi)^n =$$

$$= \frac{1}{tg\varphi}\beta K_1\left(K_2 tg\varphi - \frac{1}{2}K_2^2 tg^2\varphi + \frac{1}{3}K_2^3 tg^3\varphi + O(tg^4\varphi)\right) = \tag{7}$$

$$= \beta K_1 K_2 - \frac{1}{2}K_1 K_2^2 tg\varphi + \frac{1}{3}K_1 K_2^3 tg^2\varphi + O(tg^3\varphi),$$

где

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H^n_{i+1j} - H^n_{i-1j}}{2h_x}\right)^2 + \left(\frac{H^n_{ij+1} - H^n_{ij-1}}{2h_y}\right)^2} + O(h_x^2 + h_y^2). \tag{8}$$

Аппроксимируем уравнение (2):

$$\frac{z_{ij}^{n+1} - z_{ij}^n}{\tau} = -k_{1,ij}\, z_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + k_{2,ij}\,, \tag{9}$$

где

$$z_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2} z_{ij}^n . \tag{10}$$

В граничных узлах получаем следующие выражения:

- верхняя граница $(x, y) \in \Gamma_{x-}$

$$(K(H)H'_x)'_x \cong K^n_{i+\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2}(H_{i+1j}^{n+1} - H_{ij}^{n+1});$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H^n_{i+1j} - H^n_{ij}}{h_x}\right)^2 + \left(\frac{H^n_{ij+1} - H^n_{ij-1}}{2h_y}\right)^2}\ ;$$

♦ нижняя граница $(x, y) \in \Gamma_{x+}$

$$(K(H)H'_x)'_x \cong -K^n_{i-\frac{1}{2}j}(H)\frac{1}{h_x^2}(H^{n+1}_{ij} - H^{n+1}_{i-1j})\,;$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H^n_{ij} - H^n_{i-1j}}{h_x}\right)^2 + \left(\frac{H^n_{ij+1} - H^n_{ij-1}}{2h_y}\right)^2}\ ;$$

♦ левая граница $(x, y) \in \Gamma_{y-}$

$$(K(H)H'_y)'_y \cong K^n_{ij+\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_x^2}(H^{n+1}_{ij+1} - H^{n+1}_{ij})\,;$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H^n_{i+1j} - H^n_{i-1j}}{2h_x}\right)^2 + \left(\frac{H^n_{ij+1} - H^n_{ij}}{h_y}\right)^2}\ ;$$

♦ правая граница $(x, y) \in \Gamma_{y+}$

$$(K(H)H'_y)'_y \cong -K^n_{ij-\frac{1}{2}}(H)\frac{1}{h_x^2}(H^{n+1}_{ij} - H^{n+1}_{ij-1})\,;$$

$$tg\varphi \cong \sqrt{\left(\frac{H^n_{i+1j} - H^n_{i-1j}}{2h_x}\right)^2 + \left(\frac{H^n_{ij} - H^n_{ij-1}}{h_y}\right)^2}\ .$$

Порядок аппроксимации схемы (6) будет равен $O(h_x{}^2 + h_y{}^2 + \tau)$, для схемы (9) $O(\tau^2)$ [4].

В [4] было доказано, что схема (6) устойчива и консервативна.

Метод верхней релаксации. Для решения полученной СЛАУ использовался метод верхней релаксации [2].

Любой двухслойный итерационный метод можно записать в следующей канонической форме:

$$B\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = f \qquad n = 0,1\ldots,\ y^0 = u_0.$$

Каноническая форма для метода верхней релаксации представлена следующим образом:

$$\begin{cases} (D + \omega A^-)\dfrac{(y^{s+1} - y^s)}{\omega} + Ay^s = f. \\ y^0 \equiv u \end{cases}$$

Видим, что

$$B = D + \omega A^{-},\ \tau = \omega.$$

После преобразований получим:

$$\left(A^{-} + \frac{1}{\omega}D\right)y^{s+1} + \left(A^{+} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)D\right)y^{s} = f.$$

A^{+} – верхняя треугольная (наддиогональная) матрица, A^{-} – нижняя треугольная (поддиагональная) матрица, D – диагональная матрица.

Отсюда находим итерационную формулу:

$$y_i^{s+1} = (1-\omega)y_i^{s} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=i}^{N} a_{ij}y_j^{s} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j^{s+1}\right).$$

В данной задаче мы использовали значение веса ω=1,80.

Алгоритм и программная реализация

1. Задание входных данных.

В программе задаются следующие параметры:

- шаг по времени;
- шаги по пространству;
- начальный момент времени;
- конечный момент времени;
- характеристики текучести;
- коэффициенты впитывания и промокания;
- количество осадков;
- для каждого узла задаются номер, его начальные и граничные условия (задаются чтением из файла).

2. Первоначальное создание маски для задания коэффициентов с учетом граничных условий.

3. Решение системы уравнений:

- начало цикла по количеству итераций (*k*);
- расчет высоты столба воды: вычисление коэффициентов *A(P)*, *B(P,Q)* и вектора правой части в зависимости от граничных условий; решение полученной системы уравнений с помощью МВР:
  - исходные матрицы H0 (рельеф) и Region (расчетные и нерасчетные узлы) считываются из файла нулевым процессом;
  - происходит разбиение исходных матриц на сегменты (разбиение производится по строкам). Общее количество строк делится на количество процессов. Каждому процессу достается одинаковое количество строк. Если у нас есть остаток от деления, то этот остаток достается последнему процессу
  - так как для расчета мы используем метод верхней релаксации, то для того чтобы посчитать значение в $(i;j)$ узле, нам необходимо знать значения в $(i-1;j)$, $(i+1;j)$, $(i;j-1)$, $(i,j+1)$ узлах. Для этого первому и последнему процессам мы передаем на одну строчку больше, а остальным процессам мы передаем на две строчки больше. Эти строчки передаются только на чтения, расчеты в них не производятся;

- на каждом процессе вычисляется невязка;
- каждый процесс пересылает свою невязку на нулевой процесс;
- на нулевом процессе вычисляется максимальная невязка, которая затем сравнивается с погрешностью ε;
- после того как вычислена матрица глубин H, мы производим сбор матрицы на нулевом процессе;
- если полученная высота столба воды меньше естественного уровня, то следует исключить узел из расчета;
- создание маски с учетом исключенных узлов;
- вычисление значения для параметра, характеризующего впитывание;
- сброс значений для исключенных из расчета узлов;
- создание маски.
- наращивание *k*, выход осуществляется по достижению определенного значения.

4. Сохранение полученного значения *H*.

Входные и выходные данные.

Входной файл H0.txt содержит значение естественного уровня воды для каждого узла. Входной файл region.txt содержит метки для расчетных нерасчетных узлов (-1 – если узел нерасчетный и 1 – для расчетных узлов).

Выходной файл H.txt содержит полученные значения для высоты столба воды в каждом из узлов.

Программная реализация включает в себя следующие функции:

- инициализация матриц, где задаются первоначальные значения для коэффициентов;
- создание маски для задания коэффициентов *A(P)*, *B(P,Q)* с учетом граничных условий;
- вычисление нелинейного коэффициента *K(H)* с учетом граничных условий;
- реализация метода верхней релаксации для решения СЛАУ;
- вычисление высоты столба воды;
- вычисление значения для впитывания и промокания грунта;
- функция для обновления меток расчетных и нерасчетных узлов;
- функция для основных вычислений;
- главная функция, в которой происходит считывание из файлов входных данных, вызываются инициализации, создания маски, основных вычислений и сохранение данных.

Оценка целесообразности применения данного параллельного алгоритма. Программа, разработанная в процессе исследования проблемы накопления и фильтрации осадков, была просчитана на разном количестве вычислительных элементов (от 1 до 32), при использовании сеток с разным количеством ячеек (256, 512,1024 и 2048). В результате были получены графики времени выполнения программы, ускорения и эффективности.

Из графиков видно, что эффективность работы программы растет с увеличением числа ячеек в сетке. Для сеток с небольшим количеством узлов (256-512) нецелесообразно использовать количество процессоров больше двух. В расчетах на сетках с менее чем 2048 ячейками следует задействовать не более 10-ти процессорных элементов. Таким образом, для целесообразности использования в работе супервычислительных систем следует брать сетки с количеством узлов более чем 10^3.

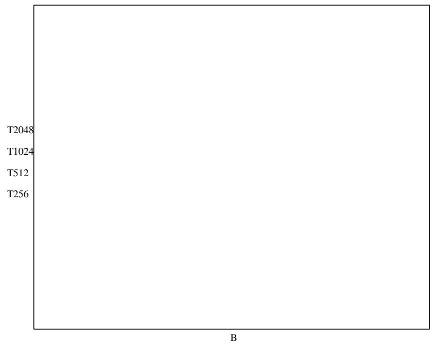

Рис. 2. График зависимости времени расчета от количества процессоров для сеток с 2048, 1024, 512 и 256 ячейками

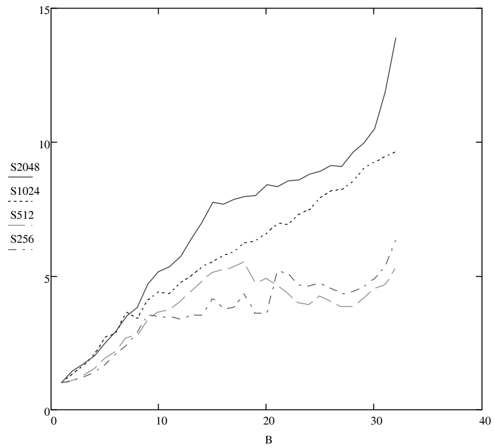

Рис. 3. График зависимости ускорения от количества процессоров для сеток с 2048, 1024, 512 и 256 ячейками

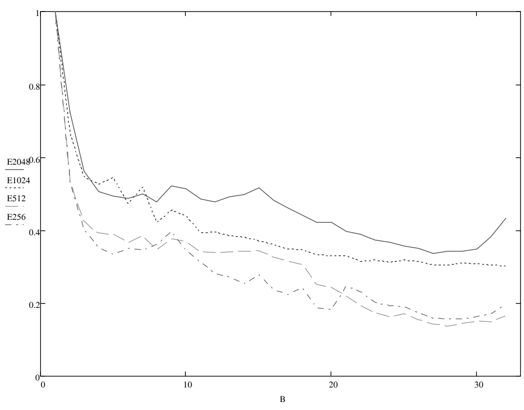

Рис. 4. График зависимости эффективности от количества процессоров для сеток с 2048, 1024, 512 и 256 ячейками

Результаты численных экспериментов. Для области, показанной на рис. 1, получены следующие результаты:

- при интенсивности осадков $f=1$ и коэффициенте промокания $k_1=0,1$, коэффициенте впитывания $k_2=0,1$ в полосе области, с седьмой по одиннадцатую строку (по оси Oy) и $k_1=1,5$, $k_2=1$ по краям области, 50 итерациях по времени результат показан на рис. 5.

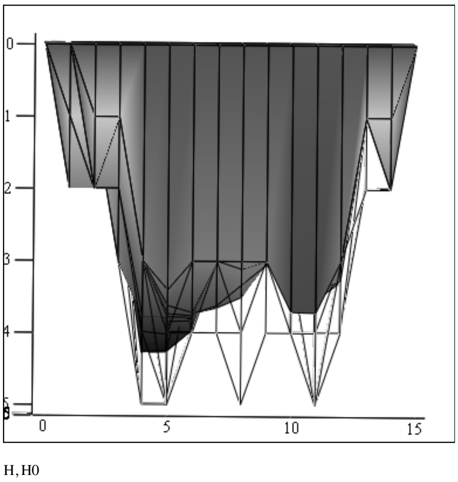

Рис. 5. Затопление и промокание при небольшом количестве осадков

- при 500 итерациях, источнике $f=1$ до 400 итерации, $f=0$ после, и тех же остальных параметрах рис. 6.

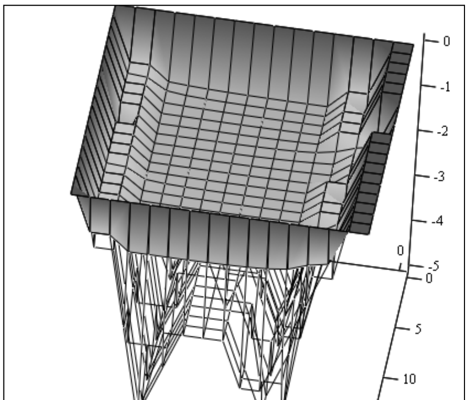

Рис. 6. Затопление при увеличении количества осадков

На рис. 5-6 закрашенная область есть уровень воды, а незакрашенная – исходный рельеф.

Можно видеть, что в первую очередь происходит затопление в частях области с небольшим впитыванием, что видно из рис. 2, но при большой продолжительности осадков (или их высокой интенсивности) затапливается вся область, таким образом, результаты численных экспериментов совпадают с ожидаемыми.

Заключение. Данная работа посвящена оценке скоплений дождевой воды и прогнозированию затоплений. Модель, полученная в ходе работы, в дальнейшем может быть использована для предварительной проверки эффективности дождевых канализаций в городских условиях.

Для решения этой задачи было использовано уравнение Сен-Венана, связывающее высоту столба воды с потоком, и вспомогательное уравнение, задающее коэффициенты впитывания грунта.

Результатом работы программы являются сеточные функции высоты столба жидкости, а также картины динамики затопления области. Полученные результаты являются физичными и согласуются с ожидаемыми.

В ходе выполнения работы было сделано:

- построена непрерывная математическая модель для расчета скоплений дождевой воды, учитывающая такие физические характеристики, как: рельеф местности, количество осадков, степень промокания и впитывания грунта;
- выполнена дискретизация непрерывной модели с помощью интегро-интерполяционного метода;
- выполнены аналитические исследования погрешности аппроксимации, устойчивости и консервативности дискретной модели;
- выполнена программная реализация модели на языке высокого уровня C++ с поддержкой MPI;
- проведено исследование эффективности применение параллельного алгоритма;
- проведен ряд численных экспериментов;
- сделан анализ результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 666 с.
2. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.
3. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А.* Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000. – 254 с.
4. *Сухинов А.И., Чекина М.Д.* Математическая модель и численный метод для задачи динамики выпадения осадков и затопления // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 42-51.

Сухинов Александр Иванович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634310599.

Sukhinov Alexander Ivanovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: sukhinov@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634310599.

Чекина Мария Дмитриевна
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: elfik55@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: +79281541526.

Chekina Maria Dmitrievna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: elfik55@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +79281541526.