

Раздел IV. Математическое моделирование физических процессов

УДК 534.22

О.А. Савицкий

ВЫРОЖДЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ВОЗМОЖНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ*

Расширено представление о трехволновых нелинейных взаимодействиях в средах без физической дисперсии как о двух равноправных взаимозависимых процессах – энергообмене и особой, нелинейной дисперсии. На примере вырожденного параметрического взаимодействия в квадратично-нелинейной среде с ограниченным числом возможных взаимодействий рассматриваются основные закономерности нелинейной дисперсии и ее связь с энергообменом.

Волна; нелинейные взаимодействия; квадратично-нелинейная среда; вырожденное взаимодействие; энергообмен; нелинейная дисперсия.

O.A. Savitsky

A DEGENERATE INTERACTION IN QUADRATIC NONLINEAR MEDIUM WITH A LIMITED NUMBER OF POSSIBLE INTERACTIONS

The view about three-wave nonlinear interactions in a dispersionless media as two equal and interdependent processes - energy exchange and special, non-linear dispersion is expanded. For example, a degenerate parametric interaction in quadratic nonlinear medium with a limited number of possible interactions are considered the basic laws of nonlinear dispersion and its relation to energy exchange.

The wave nonlinear interactions; quadratic nonlinear medium; degenerate of networking; energy transfer; nonlinear dispersion.

Введение. Для одномерных волн в квадратично-нелинейных бездисперсионных средах характерно участие в энергообмене наряду с первичными волнами, задаваемыми граничным условием, большого числа каскадно-генерирующихся высших гармоник и комбинационных волн [1,2]. Это обстоятельство усложняет физическую картину взаимодействия исходных волн.

Для частного случая вырожденного взаимодействия многие закономерности развития нелинейного процесса можно определить, рассматривая его при искусственном ограничении количества взаимодействующих компонент. В простейшем случае достаточно рассмотреть изменения компонент спектра, заданных на входе в нелинейную среду. Этот подход не позволяет объяснить такие явления, характерные для бездисперсионных сред, как образование и движение разрывов, нелинейное поглощение исходных волн и т.д. Вместе с тем он позволяет правильно спрогнозировать

* Работа выполнена в рамках проекта РНПВШ 2.1.1/6584 и госконтракта П458 федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 -2013 годы».

вать тенденцию развития нелинейных процессов в доразрывной области. В рамках этого подхода можно охватить единым описанием всю совокупность возможных граничных условий, т.е. начальных амплитуд и фаз взаимодействующих волн.

Физической моделью рассмотренной ситуации является взаимодействие волн в гипотетической нелинейной среде с сильной физической дисперсией, которая отсутствует только в частотном диапазоне $[\omega, 2\omega]$, где нелинейные взаимодействия эффективны. И, наоборот, вне этой частотной области сильная дисперсия препятствует развитию каскадных процессов. Близкие к описанным условия реализуются в нелинейной оптике [3, 4, 5]. Другая возможность практической реализации ограничения числа эффективных взаимодействий в акустике обсуждалась в работах [6, 7] и связана с созданием искусственных нелинейных сред с селективным поглощением на специально подобранных частотах.

Задача о вырожденном взаимодействии рассматривалась в нелинейной оптике [3, 4, 5], как пример простейшего из трехволновых нелинейных процессов. В работах Р.В. Хохлова и С.А. Ахманова был разработан математический аппарат укороченных уравнений, позволяющий описывать нелинейные взаимодействия избранного числа волн. В монографии [3] дан общий анализ ВПВ методом фазовых диаграмм при произвольных расстройках волновых векторов, обусловленных физической дисперсией. В работе [4] показано, что эта задача имеет точное аналитическое решение, выражаемое через эллиптические функции.

Ранее в задаче ВПВ интерес исследователей ограничивался, как правило, случаем эффективного энергообмена волн основной и удвоенной частоты, что связано с вопросами создания параметрических усилителей и умножителей частоты [8]. Несмотря на наличие исчерпывающего математического решения задачи, подробный физический анализ ВПВ проводился только для строго определенных фазовых соотношений в исходных волнах. Вне рассмотрения остались такие вопросы, как влияние исходных фазовых соотношений на характер взаимодействия, закономерности поведения фазовых соотношений и значений фаз взаимодействующих волн в пространстве, их влияние на энергообмен.

В связи с этим, а также для соблюдения общности рассмотрения вырожденного взаимодействия представляется целесообразным привести ниже известные результаты по ВПВ с ограниченным числом взаимодействий [3, 4, 5], дополнив их анализом фазовых зависимостей. Рассмотрим ситуацию, когда физическая дисперсия между компонентами частот ω и 2ω отсутствует, что соответствует случаю, являющемуся в определенном смысле промежуточным между нелинейной оптикой и акустикой.

Теоретическая модель ВПВ с ограниченным числом взаимодействий. Систему укороченных уравнений для акустических волн получим из уравнения Бюргера [2]

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = V \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (1)$$

считая, что в среде могут взаимодействовать только волны частот ω и 2ω :

$$\begin{aligned} V(\theta, z) &= V_1(z) \sin(\theta + \varphi_1^*) + V_2(z) \sin(2\theta + \varphi_2^*) = \\ &= V_1(z) \sin[\theta + \varphi_{10} + \varphi_1(z)] + V_2(z) \sin[2\theta + \varphi_{20} + \varphi_2(z)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V(\theta, z) = V_1(z) \sin(\theta + \varphi_1^*) + V_2(z) \sin(2\theta + \varphi_2^*) = \\
&= V_1(z) \sin[\theta + \varphi_{10} + \varphi_1(z)] + V_2(z) \sin[2\theta + \varphi_{20} + \varphi_2(z)] = \\
&= V_1(z) \sin[\theta + \varphi_1(z)] + V_2(z) \sin[2\theta + \varphi_2(z) + \beta_0] = \\
&= V_1(z) \sin(\theta) + V_2(z) \sin[2\theta + \Delta\beta(z) + \beta_0] = \\
&= V_1(z) \sin(\theta) + V_2(z) \sin[2\theta + \beta(z)].
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь используются обозначения:

$$V_1 = v_1/v_0; V_2 = v_2/v_0; z = \varepsilon\omega v_0 x/c_0^2; v_0 = \sqrt{v_{10}^2 + v_{20}^2}; \theta = \omega(t - x/c_0),$$

где v_{10} и v_{20} – начальные ($z = 0$) амплитуды колебательной скорости; $\varphi_1^* = [\varphi_{10} + \varphi_1(z)]$ и $\varphi_2^* = [\varphi_{20} + \varphi_2(z)]$ – текущие фазы первой и второй волн, учитывающие начальные значения ($\varphi_{10}, \varphi_{20}$) и дополнительные набег (φ_1, φ_2), возникающие в процессе нелинейного взаимодействия волн; $\beta_0 = (\varphi_{20} - 2\varphi_{10})$ – начальное значение фазового инварианта; $\Delta\beta$ – нелинейный набег фазового инварианта; $\beta(z) = \beta_0 + \Delta\beta(z)$.

Граничное условие задачи, согласно (2), имеет вид

$$\begin{aligned}
V(\theta, z = 0) &= V_{10} \sin(\theta + \varphi_{10}) + V_{20} \sin(2\theta + \varphi_{20}) = \\
&= V_{10} \sin(\theta) + V_{20} \sin(2\theta + \beta_0).
\end{aligned}$$

Положим, что относительный вклад диссипативных эффектов мал в сравнении с нелинейными процессами ($\Gamma \ll 1$). В этом случае нелинейные эффекты успевают проявиться в полной мере, не ограничиваясь диссипацией, тогда как вторым слагаемым в уравнении (1) из-за малости параметра Γ можно пренебречь. Обратимся к комплексной записи и подставим (2) в уравнение (1). В результате удастся перейти от уравнения в частных производных к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dz} + iV_1 \frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{1}{2}V_1V_2 \exp(i\beta); \\ \frac{dV_2}{dz} + iV_2 \frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{1}{2}V_1^2 \exp(-i\beta), \end{cases} \tag{3}$$

где $\beta = (\varphi_2^* - 2\varphi_1^*)$ – текущее значение фазового инварианта [9]. После возвращения в уравнениях (3) к вещественной форме записи получаем:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dz} = -\frac{1}{2}V_1V_2 \cos\beta; \\ \frac{dV_2}{dz} = \frac{1}{2}V_1^2 \cos\beta; \\ \frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{1}{2}V_2 \sin\beta; \\ \frac{d\varphi_2}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{V_1^2}{V_2} \sin\beta. \end{cases} \quad (4)$$

Система уравнений (4) имеет интеграл, характеризующий закон сохранения энергии. Для его нахождения достаточно умножить первое и второе уравнения соответственно на V_1 и V_2 . Вычитая их друг из друга, приходим к выражению

$$\frac{d}{dz}(V_1^2 + V_2^2) = 0,$$

отражающему процесс обмена энергией между волнами V_1 и V_2 при сохранении неизменным ее общего запаса. После интегрирования закон сохранения энергии запишется в виде

$$V_1^2 + V_2^2 = 1.$$

Воспользуемся выражением для фазового инварианта бигармонической волны $\beta = (\varphi_2 - 2\varphi_1)$ и избавимся в (4) от фазовых функций взаимодействующих волн φ_1 и φ_2 . В результате несложных преобразований приходим к системе двух уравнений относительно трех переменных V_1 , V_2 и β [4]:

$$\begin{cases} \frac{d \ln(V_2/V_1^2)}{dz} = \frac{1}{2V_2} (2V_2^2 + V_1^2) \cos\beta; \\ \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{2V_2} (2V_2^2 - V_1^2) \cos\beta. \end{cases} \quad (5)$$

После суммирования правых и левых частей уравнений (5) получаем выражение

$$\frac{d}{dz} \ln \left[\frac{V_2}{V_1^2} \sin\beta \right] = 2V_2 \cos\beta,$$

которое при совместном решении с первым уравнением (4) приводится к виду [4]

$$\frac{d\beta}{dz} = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{d \ln(V_2/V_1^2)}{dz}.$$

Интегрирование полученного уравнения упрощается, если его переписать в виде

$$-\frac{d}{dz} \ln(\sin \beta) = \frac{d}{dz} \ln(V_2 V_1^2).$$

В результате приходим ко второму интегралу системы

$$\Phi = V_2 V_1^2 \sin \beta,$$

где Φ – константа, определяемая граничными условиями [4]

$$\Phi = V_{20} V_{10}^2 \sin \beta_0.$$

Определим диапазон возможных значений параметра Φ в зависимости от входных параметров волн в граничном условии. Для этого в последнем выражении откажемся от нормировки, переписав его в виде

$$\Phi = \frac{v_{20} v_{10}^2}{v_0^3} \sin \beta_0 = \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \sin \beta_0,$$

где $x = v_{20}/v_{10}$. Функция $\Phi(x)/\sin \beta_0$ имеет два экстремума относительно переменной x :

$$\Phi/\sin \beta_0 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0;$$

$$\Phi/\sin \beta_0 = 2/3\sqrt{3} \quad \text{при } x_2 = 0,5.$$

Следовательно, изменение параметра Φ при любых сочетаниях граничных условий ограничено неравенством [4]

$$0 \leq \Phi^2 \leq 4/27.$$

Для того, чтобы получить общее представление о картине взаимодействия волн, воспользуемся методом фазовых диаграмм. Поскольку наиболее интересным является вопрос о пространственных закономерностях развития процесса ВПВ, то в качестве координат на фазовой плоскости выберем пары переменных (V_1, \dot{V}_1) и (V_2, \dot{V}_2) .

Воспользуемся первым интегралом и перепишем второй интеграл в виде

$$\Phi = \pm \sqrt{1-V_1^2} V_1^2 \sin \beta.$$

Используя полученное выражение второго интеграла, избавимся в первых двух уравнениях (4) от переменной β . В результате получаем аналитические решения для двух семейств фазовых кривых (V_1, \dot{V}_1) и (V_2, \dot{V}_2) :

$$\frac{dV_1}{dz} = \mp \frac{1}{2V_1} \sqrt{V_1^4(1-V_1^2) - \Phi^2}; \quad (6)$$

$$\frac{dV_2}{dz} = \pm \frac{1}{2V_2} \sqrt{V_2^2(1-V_2^2)^2 - \Phi^2}. \quad (7)$$

Соответствие между знаками перед правыми частями выражений (6) и (7), с одной стороны, и значениями фазового инварианта β , с другой – несложно установить, воспользовавшись уравнениями для V_1 и V_2 в (4). Верхние знаки относятся к диапазону значений фазового инварианта $-\pi/2 < \beta \leq \pi/2$, тогда как нижние $\pi/2 < \beta \leq 3\pi/2$. Взаимное соответствие между парой точек на фазовых плоскостях (V_1, \dot{V}_1) и (V_2, \dot{V}_2) можно получить, используя закон сохранения $V_1^2 + V_2^2 = 1$.

Картина ВПВ будет неполной без рассмотрения динамики фазового инварианта β , характеризующего изменение фазовых соотношений между волнами V_1 и V_2 в процессе взаимодействия. Фазовый портрет ВПВ в координатах $(\beta, \dot{\beta})$ можно получить, если задать функцию $\dot{\beta}(\beta)$ параметрически, используя в качестве параметра, например V_2 :

$$\begin{cases} \sin\beta = \frac{\Phi}{V_2(1-V_2^2)}; \\ \frac{d\beta}{dz} = \frac{3V_2^2 - 1}{2V_2^2(1-V_2^2)}\Phi. \end{cases} \quad (8)$$

Самостоятельный интерес представляет характер поведения нелинейных набегов фаз взаимодействующих волн $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$. Информацию об изменениях абсолютных значений этих фаз получаем из 3-го и 4-го уравнений (4), записанных в виде

$$\frac{d\Phi_{1,2}}{dz} = -\frac{\Phi}{2V_{1,2}^2}. \quad (9)$$

Соотношения (9) связывают между собой пространственные изменения амплитуд и фаз каждой из взаимодействующих волн, обусловленные процессами нелинейного поглощения и нелинейной дисперсии. Далее будет показано, что пространственные изменения величин $d\Phi/dz$ и V могут быть представлены аналогичными зависимостями фазовой скорости и коэффициента поглощения соответствующих волн. Физический смысл этих выражений аналогичен ограничениям, которые следуют из соотношений Крамерса-Кронига в линейных диссипативно-дисперсионных средах [2]. Поскольку в выражение (9) входит параметр Φ , то очевидно, что взаимосвязь нелинейного поглощения и нелинейной дисперсии для отдельно взятой волны при ВПВ определяется амплитудно-фазовыми соотношениями в исходном спектре бигармонического возмущения.

Из (9) следует, что пространственные изменения фазы и амплитуды одной из волн связаны не только между собой, но и с аналогичными изменениями другой волны:

$$V_1^2 \frac{d\varphi_1}{dz} = V_2^2 \frac{d\varphi_2}{dz} = -\frac{\Phi}{2}.$$

Как видно, обобщенной характеристикой, отражающей совокупный вклад нелинейного поглощения и нелинейной дисперсии, является произведение квадрата амплитуды и производной $d\varphi/dz$, значение которой определяется граничными условиями, связанными параметром Φ .

Фазовые диаграммы $\dot{V}_1(V_1)$ и $\dot{V}_2(V_2)$ для амплитуд, участвующих в ВПВ волн, рассчитанные при различных значениях Φ^2 , согласно (6) и (7), представлены на рис. 1. Семейство кривых $\dot{\beta}(\beta)$, рассчитанных с использованием (8), показано на рис. 2.

Из приведенных фазовых диаграмм видно, что характер ВПВ полностью определяется значением параметра Φ , т.е. амплитудно-фазовыми соотношениями в спектре исходного возмущения. Рассмотрим режимы ВПВ, качественно различающиеся между собой.

При условии $\Phi^2 = 0$ фазовые траектории на диаграммах $\dot{V}_1(V_1)$ и $\dot{V}_2(V_2)$ представляют собой сепаратрисы, проходящие через седловые точки. На диаграмме $\dot{V}_1(V_1)$ присутствует одна седловая точка (0; 0), тогда как на графике $\dot{V}_2(V_2)$ имеется две такие особые точки ($\pm 1; 0$). Это означает, что процесс ВПВ является аperiodическим в пространстве, а его результатом при условии $z \rightarrow \infty$ является полная перекачка энергии из волны основной частоты V_1 в волну удвоенной частоты V_2 , какими бы при этом ни были значения входных параметров в рамках равенства $\Phi^2 = 0$.

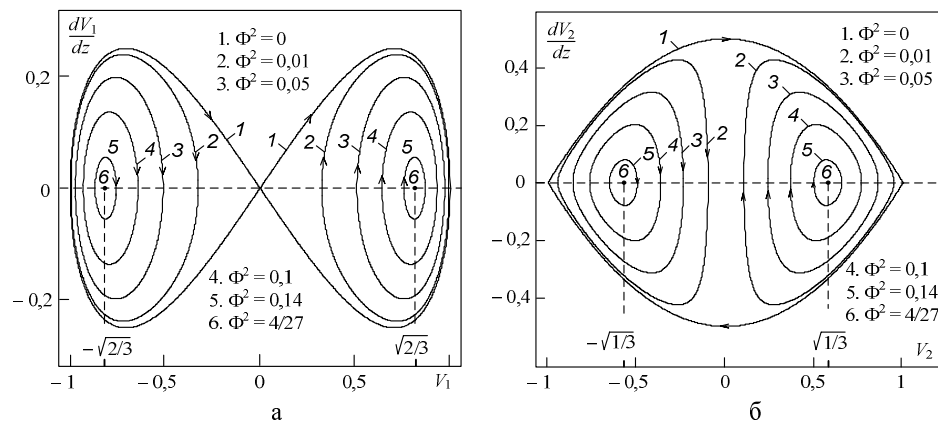


Рис. 1. Фазовые диаграммы исходных волн $\dot{V}_1(V_1)$ и $\dot{V}_2(V_2)$

Решение (4) при $\Phi^2 = 0$ не является устойчивым в том смысле, что бесконечно малое изменение Φ^2 приводит к качественному изменению характера ВПВ. Как следует из структуры Φ , это изменение может быть связано только с расфазировкой волн V_1 и V_2 .

На фазовой плоскости $\dot{\beta}(\beta)$ при $\Phi^2 = 0$ изображающая точка может находиться в одной из седловых точек $(0; 0)$ и $(\mp \pi; 0)$, рис.2. Следовательно, при $\Phi^2 = 0$ фазовый инвариант может принимать лишь значения: 0 или $\pm \pi$. Здесь возможен скачкообразный переход из состояния, соответствующего $\beta = \pm \pi$, в состояние с фазовым инвариантом $\beta = 0$, тогда как обратный переход невозможен.

Подобным образом ведут себя нелинейные набег фаз Φ_1 и Φ_2 . Согласно (9), при $\Phi^2 = 0$ они не изменяют своих значений за исключением единственно возможного скачкообразного изменения Φ_2 на π , которое происходит при проходе зависимости $V_2(z)$ через нулевое значение.

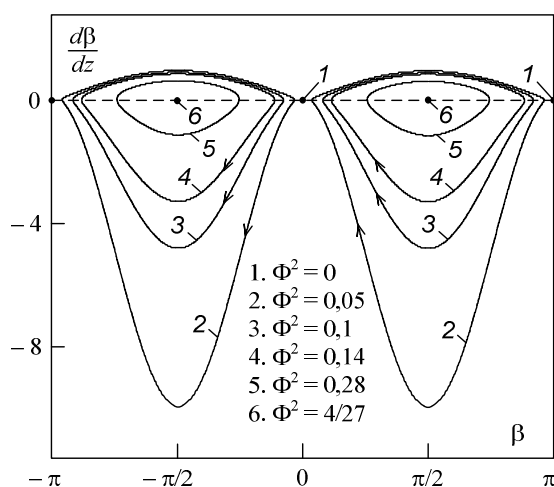


Рис. 2. Фазовая диаграмма $\dot{\beta}(\beta)$

Для условия $\Phi^2 = 0$ возможны четыре характерных набора входных параметров:

1. $V_1(z=0) \neq 0$ и $V_2(z=0) = 0$. Здесь, согласно рис. 1, с увеличением z происходит монотонное уменьшение V_1 и увеличение V_2 . Имеет место необратимая перекачка энергии в волну удвоенной частоты, известная как эффект удвоения частоты [2].
2. $V_1(0) = 0$ и $V_2(0) \neq 0$. При таком сочетании начальных амплитуд точки на фазовых диаграммах будут находиться в состоянии равновесия, т.е. $V_1(z) = 0$ и $V_2(z) = 1$.
3. $\beta(0) = \beta_0 = 0$, $V_1(0) \neq 0$ и $V_2(0) \neq 0$. Здесь происходит перекачка энергии из волны с частотой ω в волну удвоенной частоты 2ω . Если $V_1(0) \ll V_2(0)$, то можно говорить об эффекте поглощения звука звуком, тогда как при $V_1(0) \gg V_2(0)$ этот процесс называют генерацией второй гармоники или удвоением частоты.

4. $\beta(0) = \beta_0 = \pi$, $V_1(0) \neq 0$ и $V_2(0) \neq 0$. В этом случае процесс энергообмена между волнами является пространственно немонотонным. На начальном участке до некоторого расстояния z_0 энергия волны V_2 перекачивается в волну V_1 , приводя к ее усилению. Это происходит до тех пор, пока амплитуда волны V_2 не уменьшится до нуля. После этого ($z > z_0$) наступает этап генерации второй гармоники волной V_1 , который заканчивается уменьшением ее энергии до нуля на расстоянии $z \rightarrow \infty$. В точке z_0 фаза Φ_2 скачком изменяет свое значение на π .

В случае $\Phi^2 = 0$ можно получить простые аналитические выражения для пространственных распределений амплитуд $V_1(z)$ и $V_2(z)$. Для этого в уравнениях (6) и (7) проведем разделение переменных:

$$\frac{2V_1}{\sqrt{V_1^4(1-V_1^2)}} dV_1 = \mp dz;$$

$$\frac{2V_2}{\sqrt{V_2^2(1-V_2^2)^2}} dV_2 = \pm dz.$$

После интегрирования [10] получаем

$$\ln \left[\frac{1}{V_1} + \sqrt{\frac{1}{V_1^2} - 1} \right] = \frac{\pm z + C_1}{2};$$

$$\ln \left| \frac{1+V_2}{1-V_2} \right| = \pm z - C_2.$$

Несложные преобразования позволяют получить зависимости $V_1(z)$ и $V_2(z)$ в явном виде

$$V_1(z) = \operatorname{sech} \left[\frac{\pm z + C_1}{2} \right];$$

$$V_2(z) = \operatorname{th} \left[\frac{\pm z - C_2}{2} \right].$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем, используя то обстоятельство, что на входе среды ($z = 0$) амплитуды этих волн известны и равны соответственно $V_1(0) = V_{10}$ и $V_2(0) = V_{20}$. В результате получаем окончательные выражения [4]

$$V_1(z) = \frac{1}{\operatorname{ch} \left[\pm \frac{z}{2} + \operatorname{arcch} \left[\frac{1}{V_1(0)} \right] \right]};$$

$$V_2(z) = \text{th} \left[\pm \frac{z}{2} + \text{arcth}[V_2(0)] \right],$$

где верхний и нижний знаки соответствуют значениям $\beta(0) = \beta_0 = 0$ и $\beta(0) = \beta_0 = \pi$.

При значениях $0 < \Phi^2 < 4/27$ фазовые траектории $\dot{V}_1(V_1)$, $\dot{V}_2(V_2)$ и $\dot{\beta}(\beta)$ замкнуты и устойчивы, что соответствует периодическим решениям (4). Поведение амплитуд волн V_1 и V_2 в пространстве носит осциллирующий характер, энергия при взаимодействии поочередно перекачивается из одной волны в другую. Циклический характер носит и пространственное поведение фазового инварианта β (рис. 2). Для объяснения указанной особенности ВПВ в рассматриваемом случае воспользуемся методом возмущений.

При условии сильного проявления нелинейности ($\Gamma \rightarrow 0$) нелинейную поправку ΔV к полю исходных волн $V(\theta, 0)$ на малом расстоянии от излучателя ($z \equiv \Delta z \ll 1$) представим, используя уравнение (1), в виде суммы поправок первого $\Delta V'$, второго $\Delta V''$ и более высоких порядков:

$$\Delta V(\theta, \Delta z) \approx V \frac{\partial V}{\partial \theta} \Delta z = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \theta} \Delta z = \Delta V'(\theta, \Delta z) + \Delta V''(\theta, \Delta z) + \dots$$

Для нахождения поправки первого порядка достаточно в правую часть записанного выражения в качестве V подставить граничное условие. В результате добавку $\Delta V'$ к исходным волнам на частотах ω и 2ω получим в виде

$$\begin{aligned} \Delta V'(\theta, z) &= \Delta V'_1(\theta, z) + \Delta V'_2(\theta, z) = \\ &= -\frac{z}{2} V_{10} V_{20} \sin(\theta + \varphi_{10} + \beta_0) + \frac{z}{2} V_{10}^2 \sin(2\theta + \varphi_{20} - \beta_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражения (10) видно, что для ВПВ продукты взаимодействия уже во втором приближении совпадают по частоте с исходными волнами. При этом эффективность энергообмена, характеризуемая величиной ΔV , определяется не только значениями амплитуд взаимодействующих волн V_1 и V_2 , но и фазовыми соотношениями между ними (β_0).

Существенным здесь является то обстоятельство, что в процессе ВПВ, наряду с изменениями амплитуд, происходит изменение фаз и фазового инварианта взаимодействующих волн. Связано это с появлением в каждой из волн нелинейных фазовых набегов φ_1 и φ_2 . Векторные диаграммы на рис. 3 характеризуют изменения в исходном возмущении, произошедшие на малом отрезке $z \equiv \Delta z$:

$$\begin{aligned} V(\theta, z) &= V_1(\theta, z) + V_2(\theta, z) = \\ &= V(\theta, z=0) + \Delta V(\theta, z) \approx V(\theta, 0) + \Delta V'(\theta, z) = \\ &= V_1(z) \sin[\theta + \varphi_{10} + \varphi_1(z)] + V_2(z) \sin[2\theta + \varphi_{20} + \varphi_2(z)] = \end{aligned}$$

$$= V_1(z) \sin(\theta) + V_2(z) \sin[2\theta + \beta_0 + \Delta\beta(z)] = \\ = V_1(z) \sin(\theta) + V_2(z) \sin[2\theta + \beta(z)].$$

Здесь обозначены:

$$V_1(\theta, z) = V_1(\theta, 0) + \Delta V_1(\theta, z) \approx V_1(\theta, 0) + \Delta V_1'(\theta, z) = \\ = V_{10} \sin(\theta + \varphi_{10}) - \frac{z}{2} V_{10} V_{20} \sin(\theta + \varphi_{10} + \beta_0) = V_1(z) \sin[\theta + \varphi_{10} + \varphi_1(z)];$$

$$V_2(\theta, z) = V_2(\theta, 0) + \Delta V_2(\theta, z) \approx V_2(\theta, 0) + \Delta V_2'(\theta, z) = \\ = V_{20} \sin(\theta + \varphi_{20}) + \frac{z}{2} V_{10}^2 \sin(2\theta + \varphi_{20} - \beta_0) = V_2(z) \sin[\theta + \varphi_{20} + \varphi_2(z)];$$

$$V_1(z) = \frac{1}{2} V_{10} \sqrt{4 + z^2 V_{20}^2 - 4z V_{20} \cos(\beta_0)};$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{4V_{20}^2 + z^2 V_{10}^4 + 4z V_{20} V_{10}^2 \cos(\beta_0)};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1(z) = \frac{z V_{20} \sin \beta_0}{z V_{20} \cos \beta_0 - 2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2(z) = \frac{-z V_{10}^2 \sin \beta_0}{2V_{20} + z V_{10}^2 \cos \beta_0};$$

$$\Delta\beta(z) = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z).$$

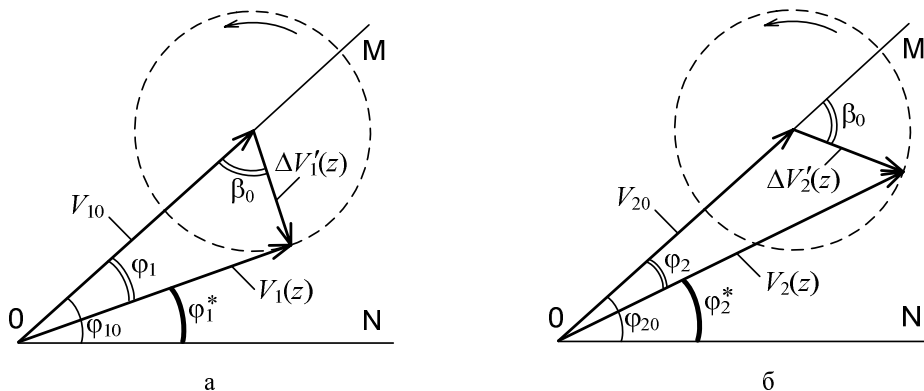


Рис. 3. Векторные диаграммы взаимодействующих волн при ВПВ

С увеличением расстояния общий характер изменений в поведении волн сохраняется, этому способствуют ограничения на количество возможных взаимодействий. Теперь нелинейная добавка (10), образуемая на произвольном расстоянии z в пределах отрезка $\Delta z \ll 1$, запишется с учетом поправок более высокого порядка в виде

$$\Delta V(\theta, z + \Delta z) = -\frac{\Delta z}{2} V_1(z) V_2(z) \sin[\theta + \varphi_1^*(z) + \beta(z)] + \frac{\Delta z}{2} V_1^2(z) \sin[2\theta + \varphi_2^*(z) - \beta(z)].$$

Видно, что энергообмен между волнами определяется текущими значениями амплитуд $V_1(z)$, $V_2(z)$ и фазового инварианта $\beta(z)$, сопровождаясь дальнейшими изменениями фаз.

Таким образом, ВПВ сопровождается двумя взаимовлияющими процессами, среди которых фазозависимое перераспределение энергии, а также пространственные изменения фаз (Φ_1 , Φ_2) и фазового инварианта взаимодействующих волн. Зависимость фаз Φ_1 и Φ_2 от расстояния, как следует из (9), имеет монотонный характер, здесь $\text{sign}(\dot{\Phi}_{1,2}) = \text{const}$. Знак и скорость изменения $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ определяются знаком и величиной интеграла Φ . Пространственная зависимость $\beta(z)$ является циклической, причем диапазон изменения β зависит от величины Φ , рис. 2.

Изменение фазовых соотношений в волнах V_1 и V_2 приводит к периодическому обращению направления энергообмена, что объясняет осциллирующий характер ВПВ. Пространственные фазовые набег, как известно, напрямую связаны с фазовой скоростью волны. Поэтому возникновение дополнительных фазовых набегов $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ при нелинейном взаимодействии волн V_1 и V_2 позволяет говорить о нелинейном изменении их фазовых скоростей, а пространственную расфазировку $\dot{\beta}(z)$ взаимодействующих волн можно интерпретировать как нелинейную дисперсию скорости звука.

Дисперсионные проявления ВПВ с ограниченным числом разрешенных взаимодействий. В теории волн принято считать [2], что нелинейная дисперсия может проявляться в средах с кубической нелинейностью, где она связана с самовоздействием нелинейной волны на кубической нелинейности. В квадратично-нелинейных средах такое явление, как видно из приведенных рассуждений, может быть результатом взаимодействия двух волн, или, другими словами, самовоздействия двухкомпонентной волны.

Поскольку ранее вопрос о нелинейной дисперсии при взаимодействии акустических волн в квадратично-нелинейных бездисперсионных средах не обсуждался, рассмотрим его подробнее и дадим ему количественную характеристику в рамках принятой модели. Рассмотрим ВПВ при граничных условиях, когда фазовые траектории $\dot{V}_1(V_1)$, $\dot{V}_2(V_2)$ и $\dot{\beta}(\beta)$ близки к одному из центров. Это условие позволяет получить хотя и приближенные, но простые для анализа уравнения, не ограничивая общности получаемых результатов, поскольку характер ВПВ при этом качественно не изменяется.

Рассмотрим функцию $\Phi = V_2 V_1^2 \sin(\beta)$, которая благодаря закону сохранения энергии может быть сведена к функции двух переменных

$$\Phi(V_2, \beta) = V_2(1 - V_2^2) \sin(\beta).$$

Покажем, что точки $(1/\sqrt{3}; \pm \pi/2)$ являются стационарными точками этой функции и соответствуют центрам фазовых диаграмм $\dot{V}_1(V_1)$, $\dot{V}_2(V_2)$, $\dot{\beta}(\beta)$. Действительно

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial V_2} \right|_{(1/\sqrt{3}; \pm \pi/2)} = (1 - 3V_2^2) \sin(\beta) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{(1/\sqrt{3}; \pm \pi/2)} = V_2(1 - V_2^2) \cos(\beta) = 0,$$

а второй дифференциал

$$\begin{aligned} d^2\Phi \Big|_{(1/\sqrt{3}; \pm\pi/2)} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial V_2^2} d^2V_2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial V_2 \partial \beta} dV_2 d\beta + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \beta^2} d^2\beta = \\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial V_2^2} d^2V_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \beta^2} d^2\beta \end{aligned}$$

есть знакоопределенная квадратичная форма [11]. Разлагая функцию $\Phi(V_2, \beta)$ в ряд Тейлора в окрестности точек $(1/\sqrt{3}; \pm\pi/2)$, с точностью до квадратичных членов, получим

$$\begin{aligned} \Phi(V_2, \beta) \approx \Phi(1/\sqrt{3}; \pm\pi/2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial V_2^2} \Big|_{(1/\sqrt{3}; \pm\pi/2)} (V_2 - 1/\sqrt{3})^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial \beta^2} \Big|_{(1/\sqrt{3}; \pm\pi/2)} (\beta \mp \pi/2)^2. \end{aligned}$$

или

$$9(V_2 - 1/\sqrt{3})^2 + (\beta \mp \pi/2)^2 = (2 \mp 3\sqrt{3}\Phi).$$

Из второго уравнения системы (8) с точностью до квадратичных членов получим

$$(\dot{\beta})^2 \approx 9(V_2 - 1/\sqrt{3})^2.$$

Из двух последних выражений и из закона сохранения несложно получить систему упрощенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $V_1(z)$, $V_2(z)$ и $\beta(z)$, тем лучше приближающих точные решения, чем ближе изображающая точка к одному из центров фазовых диаграмм на рис. 1 и рис. 2:

$$\begin{cases} (\dot{V}_2)^2 + (V_2 - 1/\sqrt{3})^2 = \frac{1}{9}(2 \mp 3\sqrt{3}\Phi); \\ (\dot{V}_1)^2 + (V_1 - \sqrt{2/3})^2 = \frac{1}{18}(2 \mp 3\sqrt{3}\Phi); \\ (\dot{\beta})^2 + (\beta \mp \pi/2)^2 = 2 \mp 3\sqrt{3}\Phi. \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{cases} V_1(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi} \cos(z + \psi_1); \\ V_2(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi} \cos(z + \psi_2); \\ \beta(z) = \pm\pi/2 + \sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi} \cos(z + \psi), \end{cases} \quad (12)$$

где константы ψ_1 , ψ_2 и ψ определяются из граничных условий

$$\begin{cases} \psi_1 = \arccos \left[\frac{3\sqrt{2}(V_1(0) - \sqrt{2/3})}{\sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi}} \right]; \\ \psi_2 = \arccos \left[\frac{3(V_2(0) - 1/\sqrt{3})}{\sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi}} \right]; \\ \psi = \arccos \left[\frac{\beta(0) \mp \pi/2}{\sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi}} \right]. \end{cases}$$

Выражения (12) дают представление об энергообмене при условии $\Phi \approx \pm 2/3\sqrt{3}$. Видно, что энергообмен между волнами V_1 и V_2 не может быть полным, причиной чему является нелинейная дисперсия, нарушающая синхронную перекачку энергии из одной волны в другую.

Выражения для нелинейных набегов фаз $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ можно получить из (9). После интегрирования (9) с точностью до постоянной получим

$$\begin{cases} \phi_1(z) = -\frac{3}{4}\Phi z - \frac{\sqrt{3}}{4}\Phi \sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi} \sin(z + \psi_1); \\ \phi_2(z) = -\frac{3}{2}\Phi z + \sqrt{3}\Phi \sqrt{2 \mp 3\sqrt{3}\Phi} \sin(z + \psi_2). \end{cases} \quad (13)$$

Анализ выражений $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ показывает, что нелинейная дисперсия проявляется в виде двух составляющих. Одна из ее компонент связана с первыми слагаемыми в (13), линейно зависящими от расстояния z , и сопровождается постоянной добавкой к фазовой скорости в невозмущенной среде. Она не приводит к смене фазовых соотношений у взаимодействующих волн, т.е. не влияет на поведение $\beta(z)$. Эту компоненту дисперсии условно можно назвать абсолютной.

Другая компонента нелинейной дисперсии связана со вторыми слагаемыми в (13) и является осциллирующей в пространстве. Она обуславливает изменение фазовых соотношений $\beta(z)$ при ВПВ, характеризуя взаимные изменения фазовых скоростей у волн V_1 и V_2 . Ее можно условно назвать относительной нелинейной дисперсией. Именно эта компонента связана с энергообменом между волнами V_1 и V_2 , который периодически изменяется в пространстве.

При малых $|\Phi|$ вклад абсолютной компоненты в нелинейный набег фаз $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ в (13) мал, преобладает относительная компонента. Поэтому здесь эффективность энергообмена между волнами V_1 и V_2 изменяется в широких пределах, а доля поочередно перераспределяемой энергии между волнами V_1 и V_2 велика (рис. 1).

С увеличением $|\Phi|$ вклад абсолютной компоненты в нелинейный набег фазы растёт, тогда как доля относительной компоненты уменьшается. В результате эффективность энергообмена между волнами V_1 и V_2 снижается.

Отметим предельный случай $\Phi = \pm 2/3\sqrt{3}$, соответствующий центрам фазовых диаграмм $\dot{V}_1(V_1)$, $\dot{V}_2(V_2)$ и $\dot{\beta}(\beta)$. Здесь нелинейные набег фаз соответственно равны

$$\varphi_1(z) = \pm z/2\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \pm z/\sqrt{3}, \quad (14)$$

тогда как энергообмен полностью отсутствует, что видно из фазовых диаграмм на рис. 1. Взаимодействие проявляется лишь в амплитудно-зависимой добавке к невозмущенной скорости звука. Такой характер ВПВ объясняется тем, что нелинейные добавки $\Delta V_{1,2}$ в (10) и исходные волны $V_{1,2}$ находятся в квадратуре, приводя лишь к изменению текущих фаз взаимодействующих волн. Такая ситуация возможна только при строго определенных амплитудно-фазовых соотношениях в граничных условиях:

$$V_1(0) = \sqrt{2/3}; \quad V_2(0) = \sqrt{1/3}; \quad \beta(0) = \pm \pi/2.$$

На рис. 4 приведены векторные диаграммы, поясняющие процесс ВПВ в случае, когда изображающая точка на фазовых диаграммах находится в устойчивом центре. Энергообмен отсутствует, взаимодействие волн приводит лишь к изменению их фазовых скоростей. Вектора V_1 и V_2 совершают вращательное движение вдоль дуги окружности.

В рассматриваемом случае постоянная нелинейная добавка к фазовой скорости в каждой из волн принимает свое максимальное значение

$$c = c_0(1 \pm \epsilon v_0/2\sqrt{3}c_0). \quad (15)$$

Так, если в качестве параметров c_0 и ϵ взять справочные данные для воды, то при избыточном давлении $p_0 = 10^6$ Па нелинейная добавка к скорости звука будет порядка 0,05 %.

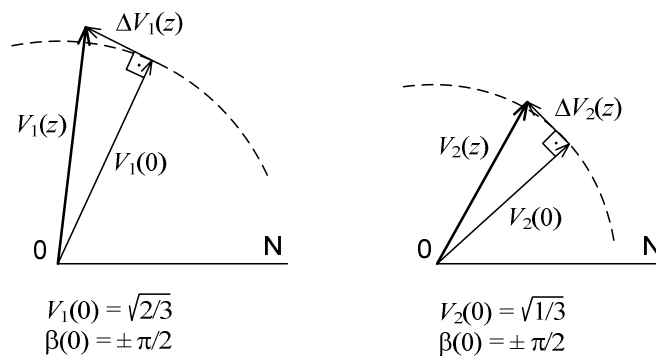


Рис. 4. Векторные диаграммы взаимодействующих волн при расположении изображающей точки в устойчивом центре фазовых диаграмм

Несмотря на малое различие скорости звука это может приводить к существенным фазовым набегам. Подобно эффектам самовоздействия на кубической нелинейности амплитудно-зависимая дисперсия в квадратично-нелинейных средах быть причиной разнообразных физических явлений, например, нелинейной рефракции и взаимофокусировки волн V_1 и V_2 .

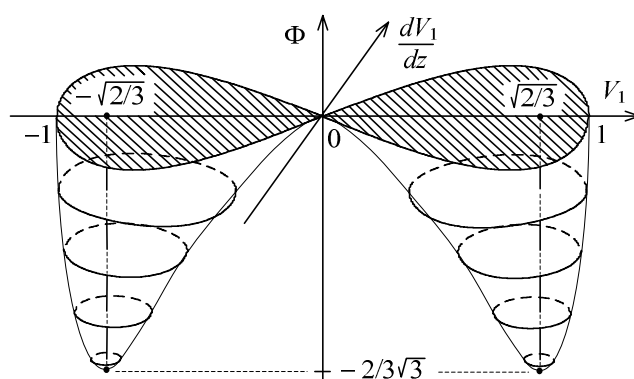


Рис. 5. Фазовая поверхность нелинейного осциллятора согласно (6)

Уравнения (6) и (7) для амплитуд взаимодействующих волн, а также уравнение (8) для фазового инварианта могут быть интерпретированы как уравнения финитных движений нелинейных осцилляторов, где роль времени выполняет пространственная координата z . Всевозможные состояния такого осциллятора в координатах $(V_{1,2}, \dot{V}_{1,2}, \Phi)$ или $(\beta, \dot{\beta}, \Phi)$ образуют фазовые поверхности. На рис. 5 и рис. 6 представлены нижние части фазовых поверхностей, рассчитанных с использованием уравнений (6) и (7), отсекаемые горизонтальной плоскостью $\Phi = 0$.

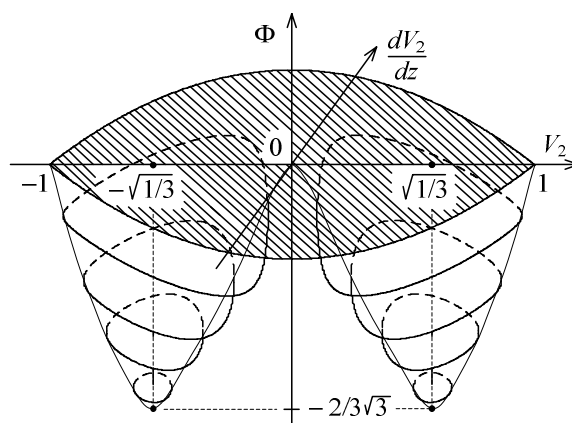


Рис. 6. Фазовая поверхность нелинейного осциллятора согласно (7)

Фазовая поверхность дает наглядную картину движения. Видно, что движение по сепаратрисе на рис. 1 соответствует нулевому значению параметра Φ и характеризуется максимально возможным энергообменом между волнами V_1 и

V_2 (сечения на уровне $\Phi = 0$ имеют наибольшую площадь). Вместе с тем два центра фазовых диаграмм соответствуют донным точкам фазовой поверхности на рис. 5, и рис. 6 с минимальным значением параметра $\Phi = -2/3\sqrt{3}$ и характеризуются отсутствием энергообмена и фазовых соотношений между взаимодействующими волнами, для этих точек фазовой поверхности в наибольшей степени проявляется абсолютная компонента нелинейной дисперсии изменяющая фазовые скорости волн V_1 и V_2 на всем протяжении области их взаимодействия.

Выводы:

1. Расширено представление о трехволновых нелинейных взаимодействиях в средах без физической дисперсии как о двух равноправных взаимозависимых процессах – энергообмене и особой, нелинейной дисперсии.
2. Предложенное модельное представление продемонстрировано на примере простейшего из трехволновых взаимодействий – вырожденного.
3. Известные результаты теоретических исследований вырожденного взаимодействия в квадратично-нелинейной среде без физической дисперсии дополнены анализом поведения абсолютных фаз и фазовых соотношений во взаимодействующих волнах.
4. В аналитической форме выделена связь между поведением амплитуд и фаз взаимодействующих волн, являющаяся проявлением фундаментального принципа причинности. Показано, что нелинейная дисперсия проявляется в виде двух составляющих: постоянной добавки к фазовой скорости в невозмущенной среде, и осциллирующей в пространстве компоненты, обуславливающей изменение фазовых соотношений при ВПВ. Именно эта компонента связана с энергообменом между волнами V_1 и V_2 , который периодически изменяется в пространстве.
5. Выполнены количественные оценки величины нелинейной добавки к скорости звука, обусловленной нелинейной дисперсией для реальных сред и амплитуд источников звука.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 287 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
3. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. – М.: Изд-во АН СССР, 1964. – 264 с.
4. Бломберген Н. Нелинейная оптика. – М.: Мир, 1966. – 424 с.
5. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. Прикладная нелинейная оптика. – М.: Физматлит, 2004. – 512 с.
6. Руденко О.В. К проблеме искусственных нелинейных сред с резонансным поглотителем // Акуст. журн. – 1983. – Т. 29. – № 3. – С. 398-402.
7. Андреев В.Г., Руденко О.В. О процессах неискаженного распространения и эффективного удвоения частоты интенсивной акустической волны в нелинейных селективно-поглощающих средах // Прикладная акустика. – Таганрог, 1983. Вып. 9. – С. 3-7.
8. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. Под ред. С.А. Ахманова. – М.: Мир, 1976.
9. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. ДАН СССР, 1975. – Вып. 4. – С. 791794.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1963. – 1100 с.
11. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.

Савицкий Олег Анатольевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: osav66@mail.ru.

347932 г. Таганрог, ул. Ломоносова, 57/1, кв. 57.

Тел.: 88634315638; +79034354049.

Savitsky Oleg Anatoljevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: osav66@mail.ru.

57/1, Lomonosov street, sq. 57, Taganrog, 347932, Russia.

Phone: +78634315638; +79034354049.

ДК 551.466

И.Б. Аббасов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГОВЫХ СКЛОНАХ РАЗНОЙ
КРУТИЗНЫ**

Рассматриваются вопросы моделирования рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговых склонах разной крутизны в условиях залива. При подходе к берегу происходит постепенное уменьшение длины волны и заострение гребней. Представлены пространственно-трехмерные модели рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговых образованиях.

Нелинейные поверхностные гравитационные волны; мелководье; рефракция; береговые образования.

I.B. Abbasov

**MODELLING OF REFRACTION OF NONLINEAR SURFACE GRAVITY
WAVES ON COASTAL SLOPES OF THE DIFFERENT STEEPNESS**

In article problems modeling of refraction nonlinear surface gravity waves on coastal slopes of a different steepness in the conditions gulf are considered. At the approach to coast there is a gradual reduction length of wave and point of crests. Spatially-three-dimensional models of refraction nonlinear surface gravity wave on coastal formations are presented.

Nonlinear surface gravity waves; shallow-water; refraction; coastal formations.

Вопросы изменения береговых линий из-за воздействия на них поверхностных волн остается достаточно актуальным. Этот вопрос связан также с явлением рефракции поверхностных волн. В работе [1] была исследована рефракция морских волн на материковой отмели. Работа [2] посвящена исследованию рефракции поверхностных волн на острове круглой, треугольной формы и на мысе. В работе [3] были рассмотрены вопросы трехмерного моделирования рефракции поверхностных волн на береговых образованиях различной конфигураций. Однако линейные модели описывают эти явления не в полном объеме, а определяют основные тенденции данных явлений. Поэтому для достоверного исследования волновых процессов необходим учет нелинейных эффектов.

Данная работа посвящена моделированию рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговых склонах разной крутизны в условиях залива. Вопрос трехмерного моделирования рефракции нелинейных поверхностных