УДК 551.466

В.Н. Зуев, В.В. Семенистый, А.И. Сухинов

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Доказывается предельная теорема для последовательности сумм линейно независимых случайных величин. Асимтотическое поведение такой последовательности сумм случайных величин описывается нормальным законом распределения.

Предельная теорема; случайная величина; формула Тейлора; нормальный закон распределения.

V.N. Zuev, V.V. Semenistay, A.I. Sukhinov

LIMIT THEOREM FOR LINEARLY INDEPENDENT PROBABLE VALUES SUM

The limit theorem proof for linearly independent probable values sum is given. The characteristic function decompose by the Taylor's formula and equivalent infinitesimals is used. The probable values' chain conduct is described by asymptotic normal distribution law.

Limit theorem; probable value; Taylor's formula; normal distribution law.

Введение. Предельные теоремы моделируют поведение последовательности случайных величин и изучаются в законах больших чисел. В работе доказывается одна из предельных теорем.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

– последовательность линейно независимых случайных величин, имеющих конечные моменты второго порядка. Без ограничения общности положим $\mathsf{E}\xi_k = 0$. Будем рассматривать эти случайные величины как векторы со скалярным произведением

$$(\xi_i, \xi_j) = \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma^2_{\xi_i, \xi_j}.$$

Систему линейно независимых векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ можно преобразовать в систему ортогональных векторов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ с помощью метода Грама–Шмидта [1] по следующей схеме:

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_1 = \xi_1,\\
&\eta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1,\\
&\eta_3 = \xi_3 - \frac{(\xi_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2 - \frac{(\xi_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1,\\
&\eta_4 = \xi_4 - \frac{(\xi_4, \eta_3)}{(\eta_3, \eta_3)}\eta_3 - \frac{(\xi_4, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2 - \frac{(\xi_4, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Векторы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ – ортогональны. Это значит, что скалярное произведение этих векторов равно

$$(\eta_i, \eta_j) = \mathsf{E}\eta_i\eta_j = \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = \sigma_{\eta_i,\eta_j} = \begin{cases} \sigma^2_{\eta_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

что равносильно некоррелированности случайных величин η_i и η_j.

Якобиан преобразования (1) равен единице

$$\frac{\partial(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_3} & \ldots & \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_n} \\ \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_3} & \ldots & \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_n} \\ \frac{\partial\eta_3}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_3}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\eta_3}{\partial\xi_3} & \ldots & \frac{\partial\eta_3}{\partial\xi_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_3} & \ldots & \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\left(1 - -\frac{(\xi_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\right) & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Это значит, что функция распределения случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ будет такой же, как и функция распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ [3].

Положим

$$\varsigma_n = \frac{s_{\varsigma_n}}{\mathsf{B}_{\varsigma_n}}, \quad \varsigma = \lim_{n\to\infty} \varsigma_n,$$

где

$$s_{\varsigma_n} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k, \ \mathsf{B}^2_{\varsigma_n} = \mathsf{D}s_{\varsigma_n} = \mathsf{D}\sum_{k=1}^{n} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\eta_k = \sigma^2_{s_{\varsigma_n}}.$$

Теорема. Если случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ некоррелированы и имеют конечную дисперсию, отличную от нуля, то при $n \to \infty$ равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} F_{\varsigma_n}(x) = F_{\varsigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Доказательство. Пусть $f_{s_{\varsigma_n}}(t)$ – характеристическая функция случайной величины s_{ς_n}. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем:

$$f_{s_{\varsigma_n}}(t) = 1 + it\mathrm{E}s_{\varsigma_n} - \frac{t^2}{2}\mathrm{E}s_{\varsigma_n}^2 + o\,(t^2), \tag{2}$$

где

$$\lim_{t\to 0} \frac{o\,(t^2)}{t^2} = 0 .$$

Представим остаточный член $o\,(t^2)$ в виде

$$o\,(t^2) = t^2 \sigma_{s_{\varsigma_n}}^2 \varepsilon(t) .$$

Здесь $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$. Очевидно, $\varepsilon(t)$ не зависит от n. Так как

$$\mathrm{E}s_{\varsigma_n} = 0,\ \mathrm{E}s_{\varsigma_n}^2 = \mathrm{D}s_{\varsigma_n} = \mathrm{D}\sum_{k=1}^{n} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\eta_k = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{\eta_k}^2 = \sigma_{s_{\varsigma_n}}^2 ,$$

то характеристическая функция (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
f_{s_{\varsigma_n}}(t) &= 1 - \frac{t^2 \sigma_{s_{\varsigma_n}}^2}{2} + t^2 \sigma_{s_{\varsigma_n}}^2 \varepsilon(t) = \\
&= 1 - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{\eta_k}^2 + t^2 \varepsilon(t) \sum_{k=1}^{n} \sigma_{\eta_k}^2 = \\
&= 1 - \left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{\eta_k}^2 \right) (1 - 2\varepsilon(t)\ \ ) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t^2}{2} \sigma_{\eta_k}^2 + t^2 \sigma_{\eta_k}^2 \varepsilon(t) \right) - o\,(t^3) .
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$o\,(t^3) = \frac{t^4}{4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2 - \left(\frac{t^4}{2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2 - \right)\varepsilon(t^2) +$$

$$+\left(t^4\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2\right)\varepsilon^2(t^2) + \left(\frac{t^6}{4}\sum_{\substack{k,l,m=1\\k\neq l\\k\neq m\\l\neq m}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2\sigma_m^2\right)\varepsilon\left(t^2\right) -$$

$$-\left(\frac{t^6}{2}\sum_{\substack{k,l,m=1\\k\neq l\\k\neq m\\l\neq m}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2\sigma_m^2\right)\varepsilon^2\left(t^2\right) + \left(\frac{t^6}{4}\sum_{\substack{k,l,m=1\\k\neq l\\k\neq m\\l\neq m}}^{n}\sigma_k^2\sigma_l^2\sigma_m^2\right)\varepsilon\left(t^2\right) -$$

$$+\ldots-\left(\frac{t^2}{2}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\sigma_k^2 - \left(t^{2n}\prod_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)\varepsilon^n\left(t^2\right).$$

Поэтому в дальнейшем остаточный член $o\,(t^3)$ в выражении (3) опускаем. Характеристическая функция случайной величины $\varsigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{B_n} = \frac{s_{\varsigma_n}}{B_n}$ в таком случае будет равна

$$f_{\varsigma_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2\sigma_{\eta_k}^2}{2B_n^2} + \frac{t^2\sigma_{\eta_k}^2}{B_n^2}\varepsilon\left(\frac{t}{B_n}\right)\right). \tag{4}$$

Сделаем в выражении (4) замену:

$$B_n^2 = n\sigma_{\text{ср}}^2,\quad \sigma_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{\eta_k}^2.$$

В результате получим:

$$f_{\varsigma_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2\sigma_{\eta_k}^2}{2n\sigma_{cp}^2} + \frac{t^2\sigma_{\eta_k}^2}{n\sigma_{cp}^2}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma_{cp}}\right)\right).$$

Прологарифмируем последнее равенство:

$$\ln f_{\varsigma_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{t^2\sigma^2_{\eta_k}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}} + \frac{t^2\sigma^2_{\eta_k}}{n\sigma^2_{\text{ср}}}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma_{\text{ср}}}\right)\right) =$$

$$\ln f_{\varsigma_n}(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2\sigma^2_{s_n}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}} + \frac{t^2\sigma^2_{s_n}}{n\sigma^2_{\text{ср}}}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma_{\text{ср}}}\right)\right). \qquad (5)$$

Так как при $n \longrightarrow \infty$ величина $\frac{t^2\sigma^2_{s_n}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma_{\text{ср}}}\right)$ будет бесконечно малой более высокого порядка малости чем $\frac{t^2\sigma^2_{s_n}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}}$, то при переходе в выражении (5) к пределу при $n \longrightarrow \infty$ бесконечно малыми $\frac{t^2\sigma^2_{k}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma_{\text{ср}}}\right)$ можно пренебречь и преобразовать это выражение к виду

$$\lim_{n\to\infty} \ln f_{\varsigma_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2\sigma^2_{s_n}}{2n\sigma^2_{\text{ср}}}\right) = -\frac{t^2}{2}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{\eta_k}}{n\sigma^2_{\text{ср}}} = -\frac{t^2}{2}\frac{n\sigma^2_{\text{ср}}}{n\sigma^2_{\text{ср}}} = -\frac{t^2}{2}.$$

Последнее означает, что

$$\lim_{n\to\infty} f_{\varsigma_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Таким образом, предельная характеристическая функция $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ является характеристической функцией для «стандартной» нормальной функции распределения $\Phi(x)$. Известно [3], что если $f_{\varsigma_n}(t) \longrightarrow f(t)$ при $n \longrightarrow \infty$, то в этом случае $F_{\varsigma_n}(x) \longrightarrow F(x)$ и наоборот. Здесь $f_{\varsigma_n}(t)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F_{\varsigma_n}(x)$, а $f(t)$ – соответственно функции распределения $F(x)$. Поэтому $F(x) = \Phi(x)$.Теорема доказана.

Заключение. Доказана предельная теорема об асимтотическом нормальном законе распределения для сумм линейно независимых случайных величин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. – М.: Наука,1980. – 400 с.
2. *Гнеденко Б.В., Колмагоров А.Н.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М. – Л., 1949. – 102 с.
3. *Прохоров Ю.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1972. – 256 с.

Зуев Виктор Никанорович
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: vnzuev@bk.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Семенистый Владимир Васильевич
E-mail: nvn@vm.tsure.ru.
Тел.: 88634371606.

Сухинов Александр Иванович
E-mail: sukhinov@gmail.com.
Тел.: 88634310599.

Zuev Viktor Nikonorovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: vnzuev@bk.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

Semenistay Vladimir Vasiljevich
E-mail: nvn@vm.tsure.ru.
Phone: +78634371606.

Sukhinov Alexander Ivanovich
E-mail: sukhinov@gmail.com.
Phone: +78634310599.

УДК 534.22

Т.А. Чистякова

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА – ЗАБОЛОТСКОЙ – КУЗНЕЦОВА

В работе приводится построение устойчивой конечно-разностной модели для уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова (ХЗК). При построении дискретной модели использованы схемы расщепления по физическим процессам, что обеспечивает устойчивость модели.

Звуковой пучок; устойчивость; сходимость; расщепление по физическим процессам.

T.A. Chistyakova

RESEARCH OF STEADINESS OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES FOR KHOKHLOV – ZABOLOTSKAYA – KUZNETSOV EQUATION

Building of steady finite-difference model for Khokhlov – Zabolotskaya – Kuznetsov equation is considered in this work. Schemes of decomposition on physical processes were used for building of discrete model. This method provide steadiness of model.

A sound beam; steadiness; convergence property; decomposition on physical processes.

1. Введение. Устойчивость разностной схемы означает, что малые возмущения аргумента в начальных данных и правой части разностной схемы приводят к равномерно малому изменению решения.