УДК 519.6

В.Е. Долгой

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ЯКОБИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается модифицированный алгоритм метода Якоби решения систем линейных алгебраических уравнений. Приводится параллельная реализация данного метода, результаты численных экспериментов.

Модифицированный алгоритм метода Якоби; параллельная реализация; численные эксперименты.

V.E. Dolgoy

PARALLEL REALISATION OF THE MODIFIED METHOD OF JAKOBI FOR THE DECISION OF SYSTEMS OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

In the given work the Jakobi's method modified algorithm of the linear algebraic equations systems decision is considered. Parallel realization of the given method, numerical experiments' results are given.

The modified algorithm of Jakobi's method; parallel realisation; numerical experiments.

Введение. Производительность вычислительных систем на сегодняшний день увеличивается в основном за счёт привлечения параллельной обработки. Современные параллельные системы весь3цывма дороги и используются для решения задач, требующих больших вычислительных ресурсов: предсказание погоды, исследование генома человека и т.д. Относительно эффективные параллельные системы на базе обычных компьютеров, соединённых при помощи коммуникационного оборудования, называют кластерами и относят к классу систем с распределённой памятью [7]. Для проведения параллельной обработки данных использовался вычислительный кластер ТТИ ЮФУ, представляющий собой систему с распределенной памятью, состоящей из 128 вычислительных узлов, объединенных сетью InfiniBand, с пропускной способностью 20Гбит/с., каждый из которых является SPM-системой с 16-ю вычислительными узлами и объемом оперативной памяти 32Гбайт.

Основным средством разработки программ является MPI (Message – Passing – Interface – интерфейс передачи сообщений). В настоящее время MPI входит в стандартный комплект практически любого многопроцессорного вычислительного комплекса. В состав среды MPI входит библиотека с интерфейсом для одного или нескольких языков программирования (Fortran, Си и Си++), а также средства для запуска и сборки параллельного приложения.

Описание параллельного алгоритма. Рассмотрим параллельную реализацию метода Якоби решения системы линейных уравнений. Приведём краткое описание алгоритма Якоби. Пусть дана система линейных уравнений вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица размерности *m*; $x = (x_1, K, x_m)^T$, $f = (f_1, K, f_m)^T$ – вектора переменных и правой части соответственно. Если все a_{ij} отличны от нуля, то система (1) может быть записана в следующем виде:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, K, m.$$

Такая запись удобна для применения итерационных методов решения системы (1).

Метод Якоби состоит из следующих шагов:

1. Произвольным образом выбирается начальное приближение (x_1^0, K, x_m^0) к решению.

2. На n-м шаге очередное приближение вычисляется по формуле

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, K, m.$$

3. Проверяется условие окончания процесса вычислений

$$\left\| x^{n+1} - x^n \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{n+1} - x_i^n \right)^2} \le \varepsilon .$$

Если оно выполнено или выполнено заданное количество итераций, то процесс вычислений заканчивается. В противном случае последовательность шагов 2-3 повторяется вновь.

Вычисление очередного приближения можно записать в матричной форме следующим образом:

$$x^{n+1} = -Bx^n + g,$$

где элементы матрицы B и вектора g вычисляются в соответствии с формулой

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/a_{ii} & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j; \end{cases} \qquad (2)$$

$$g_i = \frac{f_i}{a_{ij}}.$$

Рассмотрим положительно-определённую матрицу A с диагональным преобладанием, так как $a_{ii} > \sum_{j \neq i} \left| a_{ij} \right|$, то метод Якоби сходится. Для таких матриц условие окончания вычислений будет выполнено после конечного числа итераций при любом начальном приближении. Эту матрицу возьмём в качестве входных данных. Компоненты правой части f подберём таким образом, чтобы вектор (1, 2, …, m) был решением системы (1).

Вычисление различных компонентов очередного приближения может производиться параллельно. При параллельной реализации каждый процессор вычисляет определённую часть элементов очередного приближения. Вычисления организуются по следующей схеме. На первом этапе исходные данные задачи – матрица B и вектор g – рассылаются по рабочим процессам: все получают одинаковые части матрицы и вектора, которые сохраняются в массивах.

Следующий этап связан с выполнением итераций метода Якоби. Вычисляется очередное приближение по формуле $x^{n+1} = -Bx^n + g$. Далее производится вычисление нормы разности предыдущего и очередного приближения $\|x^{n+1} - x^n\|$ и ковсем процессам в начале следующей итерации цикла. Параллельная реализация будет корректно работать при условии, что число строк матрицы m нацело делится на число процессоров np.

Результаты численных исследований. На рис. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, проведённого на кластере ТТИ ЮФУ для задачи размерностью 10000 и точности 0.0001.

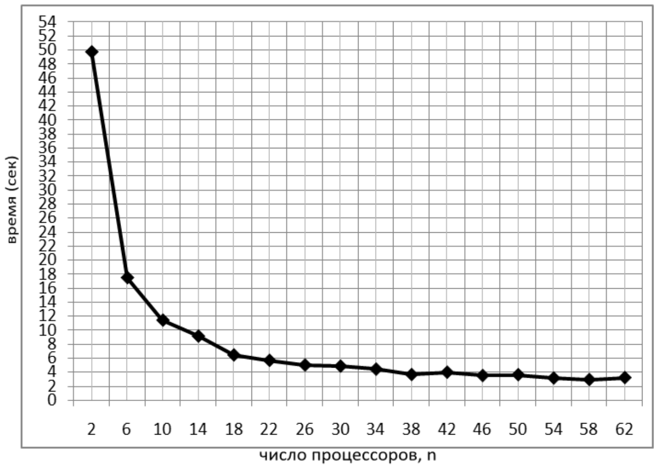

Рис. 1

График показывает зависимость времени (в секундах) от количества участвующих в вычислениях процессоров. В качестве времени работы на одном процессоре взято время работы последовательного алгоритма на одном из узлов кластера.

График показывает, что время работы снижается по мере увеличения числа процессоров до 54. Далее наблюдается стабилизация времени работы, что свидетельствует о том, что накладные расходы на передачу данных стали сравнимыми со временем вычислений. Измерения показывают, что основное время занимает рассылка матрицы B. Если матрицу B не рассылать, а формировать на каждом процессе соответствующую её часть, то ускорение будет выше.

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента для систем разной размерности. В колонках 2,3 приведено время решения систем, соответствующей размерности с помощью последовательного и параллельного алгоритма. Колонки 4,5 показывают ускорение и эффективность параллельного алгоритма. Из табл. 1 видна высокая эффективность предложенного метода.

Таблица 1

50 процессоров				
Размерность	Время послед. метод (сек)	Время парал. метод (сек)	Ускорение, Sp	Эффективность, Ep
1000	2,6459	0,0934	28,32869379	0,566573876
1500	6,0904	0,132	46,13939394	0,922787879
2000	11,0053	0,2321	47,41619991	0,948323998
2500	17,2607	0,4513	38,24662087	0,764932417

Окончание табл. 1

Размерность	Время послед. метод (сек)	Время парал. метод (сек)	Ускорение, Sp	Эффективность, Ep
3000	24,9858	0,8027	31,12719571	0,622543914
3500	34,4115	1,1898	28,92208775	0,578441755
4000	45,1221	1,3587	33,20975933	0,664195187
4500	57,8814	1,6871	34,30822121	0,686164424
5000	71,4715	2,2023	32,4531172	0,649062344
5500	86,7272	2,467	35,15492501	0,7030985
6000	104,0187	3,1467	33,05644008	0,661128802
7000	143,2668	4,7881	29,92143021	0,598428604
8000	188,3714	5,4473	34,58069135	0,691613827
9000	238,2893	6,7462	35,3220035	0,70644007
10000	296,8159	8,514	34,86209772	0,697241954
11000	360,2799	10,3922	34,6682993	0,693365986
12000	426,7133	14,4787	29,4717965	0,58943593
13000	503,5878	14,6529	34,36779068	0,687355814
14000	584,1756	19,3583	30,17700934	0,603540187
15000	676,3145	20,8705	32,40528497	0,648105699

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – СПб.: Лань, 2002.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999.
4. *Craig E.* The N-step iteration procedures // J. Math. and Phys. – 1955. – Vol. 34, № 1. – P. 64-73.
5. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
6. *Ивенс Д.* Системы параллельной обработки. – М.: Мир, 1985.
7. *Немнюгин С., Стесик О.* Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

Долгой Вячеслав Евгеньевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южного федерального университета» в г. Таганроге.

Email: nikitina.vm@gmail.com.

347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

Dolgoy Vaycheslav Evgenievich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

Email: nikitina.vm@gmail.com.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371606.