17. *Бутенков С.А., Жуков А.Л., Жинави Я.А.* Искусственные нейронные сети на базе нейронов Грассманна // Сб. тр. Международной научно-технической конференции „Интеллектуальные системы” (AIS'09). – М., 2009. – Т. 2. – С. 82-89.
18. *Rosenfeld A.* Fuzzy geometry: An updated overview // Elsevier Information Sciences, 110, 127-133, 1998 (Invited paper).
19. *Zadeh L.A.* Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 90. – P. 111-127.
20. *Бутенков С.А.* Развитие парадигмы интеллектуального анализа многомерной информации применительно к теории информационной грануляции // Сб. тр. IV Международного научно-практического семинара “Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте”. – Коломна, 2007. – Т. 1. – С. 188-194.
21. *Липчанский А.И., Лесовик У.И., Зидат Хабес.* Синтез заданной нейронной сети в программируемую логику // Радіоелектроника. Інформатика. Управленія. – 2004. – № 1. – С. 122-126.

Бутенков Сергей Андреевич
Технологический институт Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: saab@tsure.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371668.

Butenkov Sergey Andreevich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: saab@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371668.

УДК 519.6

В.Е. Долгой

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

Исследуется вопрос о применимости итерационных методов типа сопряжённых градиентов для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Однако для некоторого важного класса задач, имитирующих разложение функций по неортогональной системе, рассматриваемые методы могут давать до 5-6 верных знаков, тогда как прямые методы не дают ни одного.

Итерационный метод; метод сопряженных градиентов; плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений.

V.E. Dolgoy

CONSTRUCTION OF EFFECTIVE ITERATIVE ALGORITHMS FOR THE DECISION OF SYSTEMS OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH BADLY CAUSED MATRIXES

The question of application of iterative conjugate gradients methods to solve ill-conditioned linear algebraic equations is discussed in this work. Nevertheless for one main class that imitated non-orthogonal system expansion of function the concerned methods may get 5-6th order of accuracy while direct ones can't get at least 1st.

Iterative method; a method of the interfaced gradients; badly caused systems of the linear algebraic equations.

Введение. При разработке эффективных итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений особый интерес представляют системы с плохо обусловленными матрицами. Решение таких систем прямым методом приводит к потере точности уже при достаточно небольших (~10) порядках исходной матрицы. На практике же возникают системы порядков 100–1000 и более. В данной работе исследовалась возможность применения для таких задач итерационных методов.

Описание методов. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ (1). Итерационные методы делятся на одношаговые, как, например, метод наискорейшего спуска, минимальных невязок, и многошаговые, типа метода сопряжённых градиентов. Реализация одношаговых методов очень проста, а каждая итерация их дешева (объем вычислений для одной итерации мал), но они имеют очень медленную сходимость [2]. Многошаговые методы рекуррентно строят базис, ортогональный по некоторому скалярному произведению. В работе выбраны для исследования следующие варианты градиентных методов.

Метод 1 [6].

$$x_0 = 0, \quad r_0 = Ax_0 - b, \quad \Delta_0 = r_0, \quad \alpha_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(\Delta_0, A\Delta_0)};$$

для $k = 1,2 \ldots$:

$$x_k = x_{k-1} - \alpha_{k-1}\Delta_{k-1}, \; r_k = \begin{cases} Ax_k - b, \\ r_{k-1} - \alpha_k A\Delta_{k-1}, \end{cases} \quad \beta_k = \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})},$$

$$\Delta_k = r_k + \beta_k \Delta_{k-1}, \qquad \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(\Delta_k, A\Delta_k)}.$$

Матрица A предполагается симметрической и положительно-определённой ($A = A^* > 0$). В методе 1 можно вычислить невязку r_n как прямым, так и рекуррентными способом. Тестовые расчёты показали, что вариант с рекуррентным вычислением невязки даёт лучшую точность.

Метод 2 (метод Крейга) [7].

$$x_0 = 0, \quad r_0 = b - Ax_0, \quad \Delta_0 = A^* r_0, \quad \alpha_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(\Delta_0, \Delta_0)};$$

для $k = 1,2 \ldots$:

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1}\Delta_{k-1}, \quad r_k = b - Ax_k \quad \beta_k = \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})},$$

$$\Delta_k = A^* r_k + \beta_k \Delta_{k-1}, \quad \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(\Delta_k, \Delta_k)}.$$

Метод Крейга является наиболее универсальным методом типа сопряжённых направлений, пригодным для решения систем уравнений с несамосопряжёнными и даже прямоугольными матрицами.

Результаты численных исследований. В работе численно исследовался один из вариантов метода сопряженных градиентов на примере матрицы Гильберта, которая известна своей плохой обусловленностью. Такая матрица возникает, в частности, в задаче среднеквадратичной аппроксимации непериодических функций с помощью неортогонального степенного базиса. Получена зависимость погрешности сопряженного решения от порядка матрицы. В качестве тестовой задачи использовалась $(N \times N)$-матрица Гильберта $A = (a_{nm}) = 1/(n + m - 1)$,

$n/m = 1, \dots, N$. В качестве решения выбирался некоторый фиксированный вектор $c = (c_n)$, $n = 1, \dots, N$, и правая часть системы (1) вычислялась по формуле $b = Ac$. Ставилась цель – достичь максимально возможной точности. Для этого задавалось большое (10^3–10^4) число итераций. В качестве оценки погрешности вычислений бралась величина $\delta = \log_{10} xerr/normc$, где $xerr = (\sum_{n=1}^{N}(x_n - c_n)^2)^{1/2}$, $normc = (\sum_{n=1}^{N} {c_n}^2)^{1/2}$, где $x = (x_n)$ – приближённое решение. В результате проведённых вычислений сложилась следующая картина зависимости, достигнутой оценки погрешности δ от порядка матрицы: вначале, для порядков 1–10, происходит достаточно быстрый рост погрешности, а затем погрешность стабилизируется, выходя на некоторый почти постоянный уровень. В качестве решения бралось $c = Sl$, где $Sl = (Sl_n)$ – вектор псевдослучайных чисел.

Порядок матрицы (N)

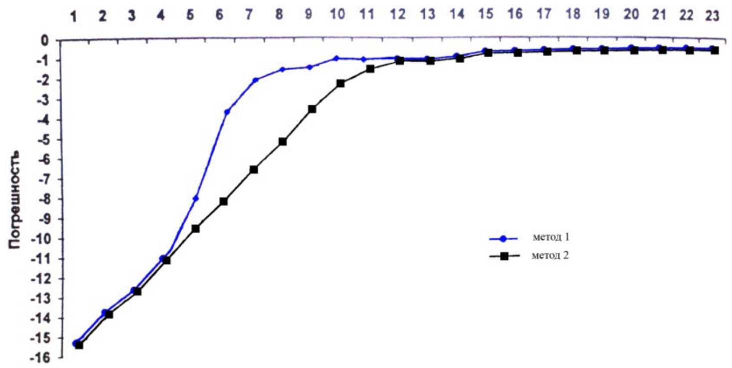

Рис. 1. Зависимость δ от N

Методы типа сопряженных направлений при абсолютно точной их численной реализации являются точными методами. Если A – невырожденная $N \times N$-матрица, то после N шагов должно получиться точное решение задачи. Однако вычислительный процесс приобретает чисто итерационный характер. В проведённых экспериментах продолжение итераций до номеров, гораздо больших порядка системы, улучшает результаты. Приведенные графики наглядно демонстрируют, что рассмотренные итерационные методы типа сопряженных градиентов работают существенно лучше прямых методов. Таким образом, для решения некоторых задач (разложение функции по неортогональному базису) применение данных методов дает выигрыш в точности полученного решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Об аппроксимации неортогональными системами // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – С. 95-108.
2. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – СПб.: Лань, 2002.
3. *Абрамов А.А.* Об одном методе решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31. – № 4. – С. 483-491.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
6. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999.
7. *Craig E.* The N-step iteration procedures // J. Math. and Phys. – 1955. – Vol. 34. – № 1. – P. 64-73.
8. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

Долгой Вячеслав Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Dolgoy Vaycheslav Evgenievich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +7634371606.

УДК 517.968.2

А.В. Шишеня

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ВЫРОЖДЕННОСТИ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Сформулирована и доказана теорема, дающая необходимое и достаточное условие вырожденности ядра интегрального уравнения.

Интегральное уравнение; вырожденные ядра; функциональный определитель; вронскиан.

A.V. Shishenya

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF INTEGRAL EQUATION KERNEL DEGENERATION

The theorem that gives necessary and sufficient condition of integral equation kernel degeneration is state and proved in the state.

Integral equation; degenerate kernel; functional determinant; Wronskian.

В настоящее время многие прикладные задачи приводят к интегральным уравнениям. С другой стороны, в функциональном анализе важным примером операторов являются интегральные операторы, поэтому их изучение имеет не только прикладное, но и теоретическое значение. Широким классом интегральных уравнений, поддающихся аналитическому решению, являются линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром. В работах [1]-[3] изложены методы решения наиболее распространённых типов интегральных уравнений. Метод построения точных решений нелинейных интегральных уравнений второго рода с вырожденным ядром обобщается в работе [4]. В данной статье предложен критерий вырожденности ядра интегрального уравнения.

Сформулируем известное утверждение, которое потребуется при дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим систему функций

$$\left\{c_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{n}. \tag{1}$$

Если каждая функция $c_k(x)$ системы (1) является n раз непрерывно дифференцируемой, то для линейной независимости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы её определитель Вронского