БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
2. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.

Чистяков Александр Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: cheese_05@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371606.

Chistyakov Alexander Evgenievich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: cheese_05@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.

УДК 519.6

В.С. Васильев

АППРОКСИМАЦИИ В СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ

Строятся консервативные симметричные аппроксимации слагаемых дивергенции вектора. Аппроксимации компонент градиента скаляра строятся как сопряженные, что обеспечивает знакоопределенность сеточного оператора уравнения для возвышения уровня. Симметрия обеспечивает выполнение на сеточном уровне основных метрических соотношений, что исключает возможность возникновения сеточных источников определенного типа.

Математическое моделирование; сеточные методы; криволинейные сетки; сеточные аппроксимации; законы сохранения.

V.S. Vasiliev

THE GRID APPROXIMATIONS AT THE SHALLOW WATER EQUATIONS ON A CURVE-LINEAR MESHES

The conservative and symmetric approximations of a item of divergent of vector are constructed. The approximations of gradient of scalar are constructed to provide conjugation. Conjugation provides positive definition grid operator of the free surface elevation equation. Symmetry provides a base metric identities therefore exclude arising of a grid sources of same types.

Mathematical simulation; grid methods; curve-linear meshes; grid approximations; conservative lows.

Введение. В [1] приводится достаточно общая система уравнений мелкой воды [2], метод расщепления по физическим процессам (метод поправки к давлению) применительно к разрешению системы уравнений в усредненных компонентах вектора скорости или в полных потоках [3], диссипативные фильтры [4]. Обсуждается задание различных сеточных функций на различных элементах (разнесенная сетка) криволинейной сетки, в том числе разложение векторных функций по контравариантному, ковариантному локальным и глобальному декартову базису.

В данной статье рассматриваются аппроксимации слагаемых дивергенции вектора в уравнении неразрывности [1] применительно к разрешению системы уравнений в усредненных компонентах вектора скорости или в полных потоках. Аппроксимации компонент градиента скаляра строятся как сопряженные, что обеспечивает знакоопределенность оператора уравнения для возвышения уровня [1]. Анализируется возникновение различных сеточных источников вследствие невыполнения на сеточном уровне основных метрических соотношений и указываются возможности преодоления проблемы.

Разрешение системы в полных потоках. Следствием разрешения системы в полных потоках [1] являются следующие аппроксимации слагаемых дивергенции вектора на ячейках (обозначения соответствуют [1]):

$$\left\langle f'_x\Delta\right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle D(f,y)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

$$\left\langle f'_y\Delta\right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle D(x,f)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

где $\left\langle D(f,g)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} =$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left(f_{i+1,j+1} - f_{i,j}\right)\left(g_{i,j+1} - g_{i+1,j}\right) - \left(f_{i,j+1} - f_{i+1,j}\right)\left(g_{i+1,j+1} - g_{i,j}\right)\right).$$

Они обеспечивают на сеточном уровне выполнение теоремы Гаусса (являются консервативными)

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = \oint_S (\mathbf{a},\mathbf{n})\,dS,$$

в том числе по отдельным слагаемым дивергенции вектора

$$\int_V (a_x)'_x\,dV = \oint_S (a_x\mathbf{i},\mathbf{n})\,dS, \qquad \int_V (a_y)'_y\,dV = \oint_S (a_y\mathbf{j},\mathbf{n})\,dS,$$

т.е. могут быть использованы для аппроксимации слагаемых U'_x и V'_y в $\operatorname{div}\mathbf{V}$.

Перепишем аппроксимации (1) в виде

$$\left\langle f'_\chi\Delta\right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = c^{(1)(\chi++)}_{i,j} f_{i,j} + c^{(1)(\chi+-)}_{i,j+1} f_{i,j+1} + c^{(1)(\chi-+)}_{i+1,j} f_{i+1,j} + c^{(1)(\chi--)}_{i+1,j+1} f_{i+1,j+1}, \tag{2}$$

где
$$c^{(1)(x--)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(y_{i-1,j} - y_{i,j-1}\right), \quad c^{(1)(y--)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(x_{i,j-1} - x_{i-1,j}\right),$$
$$c^{(1)(x-+)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(y_{i,j+1} - y_{i-1,j}\right), \quad c^{(1)(y-+)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(x_{i-1,j} - x_{i,j+1}\right),$$
$$c^{(1)(x+-)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(y_{i,j-1} - y_{i+1,j}\right), \quad c^{(1)(y+-)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(x_{i+1,j} - x_{i,j-1}\right),$$
$$c^{(1)(x++)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}\right), \quad c^{(1)(y++)}_{i,j} = \tfrac{1}{2}\left(x_{i,j+1} - x_{i+1,j}\right).$$

Сопряженными (1), (2) аппроксимациями производных в узлах будут

$$\left\langle \varphi'_\chi\Delta\right\rangle^{(1)}_{i,j} = -c^{(1)(\chi--)}_{i,j}\varphi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - c^{(1)(\chi-+)}_{i,j}\varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - c^{(1)(\chi+-)}_{i,j}\varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - c^{(1)(\chi++)}_{i,j}\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tag{3}$$

в том смысле, что в скалярных произведениях

$$\sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle \operatorname{div} \mathbf{v}\Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \text{ или } \sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle f'_\chi \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

(за исключением суммирования по граничным элементам сетки) могут быть выделены скалярные произведения

$$-\sum_{(i,j)} \left(\mathbf{v}_{i,j}, \left\langle \operatorname{grad} \varphi\Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}\right) \text{ или } -\sum_{(i,j)} f_{i,j} \left\langle \varphi'_\chi \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}$$

и наоборот. Тем самым на сеточном уровне реализуется формула Грина

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) - (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \varphi), \tag{4}$$

в том числе покомпонентно, т.е. (3) могут быть использованы в качестве аппроксимаций компонент градиента.

Соотношения

$$c^{(1)(\chi++)}_{i,j} + c^{(1)(\chi+-)}_{i,j+1} + c^{(1)(\chi-+)}_{i+1,j} + c^{(1)(\chi--)}_{i+1,j+1} = 0 \text{ и } c^{(1)(\chi--)}_{i,j} + c^{(1)(\chi-+)}_{i,j} + c^{(1)(\chi+-)}_{i,j} + c^{(1)(\chi++)}_{i,j} = 0$$

обеспечивают (второе обеспечивает также консервативность аппроксимаций (3)) на сеточном уровне равенства нулю производных констант

$$\left\langle C'_\chi \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \text{ и } \left\langle C'_\chi \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j} = 0.$$

Аппроксимации (1), (2) производных полных потоков $\left\langle U'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и $\left\langle V'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ обеспечивают на сеточном уровне выполнение метрических соотношений $x'_x = y'_y = 1$, $x'_y = y'_x = 0$ в форме

$$\left\langle x'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle y'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \left\langle x'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle y'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0,$$

где $\Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle D(x,y)/D(\xi,\eta) h_\xi h_\eta \right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, и, следовательно, соленоидальность векторных полей $U = \pm x$, $V = \mp y$ и $U = \pm y$, $V = \mp x$. В частности точки покоя $x = y = 0$ (седло и центр соответственно), как и любые другие, не являются на сеточном уровне ни источниками, ни стоками (точки покоя этих типов регулярно возникают в решениях двумерных систем уравнений мелкой воды).

Располагая аппроксимациями (3) для компонент градиента $\left\langle e'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}$ и $\left\langle e'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}$, можно определить

$$\left\langle He'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j} = \overline{H}_{i,j} \left\langle e'_x \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}, \quad \left\langle He'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j} = \overline{H}_{i,j} \left\langle e'_y \Delta \right\rangle^{(1)}_{i,j}, \tag{5}$$

где

$$\overline{H}_{i,j} = \frac{H_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + H_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + H_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \Delta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Delta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}.$$

Введенный таким образом сеточный проектор для $\overline{H}_{i,j}$ обеспечивает сеточный закон сохранения массы на интегральном уровне (если $\Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$ для ячеек, выходящих за границу области). Формула Грина (4) применительно к аппроксимациям (5)

$$(\mathbf{v}, H\,\mathrm{grad}\,e) = \mathrm{div}(e\mathbf{V}) - e\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \mathrm{div}(e\mathbf{V}) + (H'_t + \sigma)e$$

выражает на сеточном уровне механизмы изменения потенциальной энергии системы [1].

Но для подстановки в сеточное уравнение неразрывности (с целью получения сеточного уравнения для возвышения уровня) нужны компоненты U и V, то есть в конечном итоге не элементарные (объемные) интегралы $\langle He'_x\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}$ и $\langle He'_y\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}$, а непосредственно $\langle He'_x\rangle^{(1)}_{i,j}$ и $\langle He'_y\rangle^{(1)}_{i,j}$ [1]. Их определим следующим образом:

$$\langle He'_x\rangle^{(1)}_{i,j} = \overline{H}_{i,j}\langle e'_x\rangle^{(1)}_{i,j}, \qquad \langle He'_y\rangle^{(1)}_{i,j} = \overline{H}_{i,j}\langle e'_y\rangle^{(1)}_{i,j},$$

где $\langle e'_x\rangle^{(1)}_{i,j} = \Delta^{-1}_{i,j}\langle e'_x\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}$; $\langle e'_y\rangle^{(1)}_{i,j} = \Delta^{-1}_{i,j}\langle e'_y\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}$;

$$\Delta_{i,j} = \tfrac{1}{4}\Big((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})\Big).$$

Так определенные компоненты градиента $\langle e'_x\rangle^{(1)}_{i,j}$ и $\langle e'_y\rangle^{(1)}_{i,j}$ обеспечивают знакоопределенность оператора сеточного уравнения для возвышения уровня [1]: в суммах (скалярных произведениях)

$$\sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \langle \mathrm{div}(H\,\mathrm{grad}\,e)\Delta\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle \left(Hf'_\chi\right)'_\chi \Delta\right\rangle^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

(за исключением суммирования по граничным элементам) могут быть выделены суммы (скалярные произведения)

$$-\sum_{(i,j)} \overline{H}_{i,j}\left|\langle \mathrm{grad}\,\varphi\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}\right|^2 \Delta_{i,j} \quad \text{или} \quad -\sum_{(i,j)} \overline{H}_{i,j}\left(\langle e'_\chi\Delta\rangle^{(1)}_{i,j}\right)^2 \Delta_{i,j}.$$

Однако эти аппроксимации $\langle e'_x\rangle^{(1)}_{i,j}$ и $\langle e'_y\rangle^{(1)}_{i,j}$ не обеспечивают на сеточном уровне выполнение метрических соотношений $x'_x = y'_y = 1$ и $x'_y = y'_x = 0$. Это, в частности, означает, что на сеточном уровне в линейном поле возвышения e (в однородном поле $\mathrm{grad}\,e$) при $H = \mathrm{const}$ однородность сложившегося однородного поля (U,V) будет с течением времени утрачиваться (даже при подобранных граничных условиях), в то время как подобное модельное решение исходной системе дифференциальных уравнений присуще, а именно подобная однородность (но не обязательно стационарность) должна сохраняться в любой момент времени.

Точнее говоря, вопрос выполнения или нарушения на сеточном уровне метрических соотношений $x'_x = y'_y = 1$, $x'_y = y'_x = 0$ сводится к тому, что понимается под $\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ в линейном поле $e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = e_0 + e_x x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + e_y y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$. Если

$\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(\chi_{i,j}+\chi_{i,j+1}+\chi_{i+1,j}+\chi_{i+1,j+1}\right)$, то метрические соотношения не выполняются, хотя в силу консервативности аппроксимаций действие источников (чисто метрического происхождения) в целом по области компенсируется действием стоков. Если же под $\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ понимается $\chi^{(-)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\chi_{i,j+1}+\chi_{i+1,j}\right)$ для аппроксимаций $\left\langle e'_\chi\right\rangle^{(1)}_{i,j}$, $\left\langle e'_\chi\right\rangle^{(1)}_{i+1,j+1}$ и $\chi^{(+)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\chi_{i,j}+\chi_{i+1,j+1}\right)$ для аппроксимаций $\left\langle e'_\chi\right\rangle^{(1)}_{i,j+1}$, $\left\langle e'_\chi\right\rangle^{(1)}_{i+1,j}$, то метрические соотношения выполняются, но при этом приходится различать поля $e^{(-)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и $e^{(+)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ для узлов, расположенных в «шахматном» порядке.

Обеспечивают выполнение метрических соотношений без необходимости рассмотрения двух полей (точнее говоря, здесь поле e задано и на ячейках $e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, и в узлах $e_{i,j}$) аппроксимации

$$\left\langle e'_x\Delta\right\rangle_{\pi,\varsigma}=\left\langle D(e,y)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma},\quad \left\langle e'_y\Delta\right\rangle_{\pi,\varsigma}=\left\langle D(x,e)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma},$$

где (π,ς) – грань $\left(i,j+\frac{1}{2}\right)$ или $\left(i+\frac{1}{2},j\right)$ (при $\pi=i$, $\varsigma=j+\frac{1}{2}$ или $\pi=i+\frac{1}{2}$, $\varsigma=j$);

$$\left\langle f'_\xi h_\xi\right\rangle_{\pi,\varsigma}=f_{\pi+\frac{1}{2},\varsigma}-f_{\pi-\frac{1}{2},\varsigma};\quad \left\langle f'_\eta h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma}=f_{\pi,\varsigma+\frac{1}{2}}-f_{\pi,\varsigma-\frac{1}{2}};$$

$$\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(\chi_{i,j}+\chi_{i,j+1}+\chi_{i+1,j}+\chi_{i+1,j+1}\right);$$

$$\left\langle D(f,g)/D(\xi,\eta)h_\xi h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma}=\left\langle f'_\xi h_\xi\right\rangle_{\pi,\varsigma}\left\langle g'_\eta h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma}-\left\langle f'_\eta h_\eta\right\rangle_{\pi,\varsigma}\left\langle g'_\xi h_\xi\right\rangle_{\pi,\varsigma}.$$

Эти же аппроксимации обеспечивают на сеточном уровне справедливость теоремы о равенстве нулю циркуляции по замкнутому контуру (в данном случае состоящему из ребер одной или нескольких ячеек) градиента скаляра

$$\oint(\operatorname{grad}\varphi,d\mathbf{l})=0.$$

Но такая аппроксимация компонент градиента скаляра возвращает рассмотрение к заданию компонент вектора скорости не в узлах, а на гранях (совпадающих с ребрами) [1].

Разрешение системы в усредненных компонентах. Выражения полных потоков $\langle Hf\rangle_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\langle Hf\rangle_{i+\frac{1}{2},j}$ через значения компонент u и v вектора скорости, заданные в узлах, и через значения полной глубины H, заданные на ячейках [1], порождают следующие аппроксимации слагаемых дивергенции вектора (в уравнении неразрывности):

$$\left\langle (Hf)'_\chi\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=c^{(2)(\chi++)}_{i,j}f_{i,j}+c^{(2)(\chi+-)}_{i,j+1}f_{i,j+1}+c^{(2)(\chi-+)}_{i+1,j}f_{i+1,j}+c^{(2)(\chi--)}_{i+1,j+1}f_{i+1,j+1},\quad(6)$$

где $c^{(2)(x--)}_{i,j}=-\frac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i-\frac{1}{2},j}\left\langle y'_\xi h_\xi\right\rangle_{i-\frac{1}{2},j}+\frac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j-\frac{1}{2}}\left\langle y'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j-\frac{1}{2}}$,

$c^{(2)(x-+)}_{i,j}=\frac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i-\frac{1}{2},j}\left\langle y'_\xi h_\xi\right\rangle_{i-\frac{1}{2},j}+\frac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle y'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}}$,

$$c_{i,j}^{(2)(x+-)} = -\tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j-\frac{1}{2}}\left\langle y'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle y'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j},$$
$$c_{i,j}^{(2)(x++)} = -\tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle y'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle y'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j},$$
$$c_{i,j}^{(2)(y--)} = \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i-\frac{1}{2},j}\left\langle x'_\xi h_\xi\right\rangle_{i-\frac{1}{2},j} - \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j-\frac{1}{2}}\left\langle x'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j-\frac{1}{2}},$$
$$c_{i,j}^{(2)(y-+)} = -\tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i-\frac{1}{2},j}\left\langle x'_\xi h_\xi\right\rangle_{i-\frac{1}{2},j} - \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle x'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}},$$
$$c_{i,j}^{(2)(y+-)} = \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j-\frac{1}{2}}\left\langle x'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle x'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j},$$
$$c_{i,j}^{(2)(y++)} = \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\xi)}_{i,j+\frac{1}{2}}\left\langle x'_\eta h_\eta\right\rangle_{i,j+\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\overline{H}^{(\eta)}_{i+\frac{1}{2},j}\left\langle x'_\xi h_\xi\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j}.$$

Введенные аппроксимации обеспечивают на сеточном уровне выполнение теоремы Гаусса (являются консервативными) в форме

$$\int\limits_V \operatorname{div}(H\mathbf{a})dV = \oint\limits_S (H\mathbf{a},\mathbf{n})dS,$$

в том числе по отдельным слагаемым дивергенции вектора (аддитивно)

$$\int\limits_V (Ha_x)'_x\, dV = \oint\limits_S (Ha_x\mathbf{i},\mathbf{n})dS, \quad \int\limits_V (Ha_y)'_y\, dV = \oint\limits_S (Ha_y\mathbf{j},\mathbf{n})dS,$$

то есть могут быть использованы для аппроксимации слагаемых $(Hu)'_x$ и $(Hv)'_y$ дивергенции $\operatorname{div}(H\mathbf{v})$. При $H = \mathrm{const}$ аппроксимации (6) обеспечивают также выполнение метрических соотношений

$$\left\langle (Hx)'_x\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle (Hy)'_y\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = H\Delta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

$$\left\langle (Hx)'_y\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left\langle (Hy)'_x\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0,$$

следовательно, сохраняют на сеточном уровне соленоидальность полей $u = \pm x$, $v = \mp y$ и $u = \pm y$, $v = \mp x$, а равенства

$$c_{i,j}^{(2)(\chi++)} + c_{i,j+1}^{(2)(\chi+-)} + c_{i+1,j}^{(2)(\chi-+)} + c_{i+1,j+1}^{(2)(\chi--)} = 0$$

обеспечивают выполнение на сеточном уровне равенств нулю производной константы (при $H = \mathrm{const}$) $\left\langle (Hc)'_\chi\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$.

Сопряженные (6) аппроксимации компонент градиента скаляра в узлах

$$\left\langle H\varphi'_\chi\Delta\right\rangle^{(2)}_{i,j} = -c_{i,j}^{(2)(\chi--)}\varphi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - c_{i,j}^{(2)(\chi-+)}\varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - c_{i,j}^{(2)(\chi+-)}\varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - c_{i,j}^{(2)(\chi++)}\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

строятся из условия выделения в скалярном произведении

$$\sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle \operatorname{div}(H\mathbf{v})\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle (Hf)'_x\,\Delta\right\rangle^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

(за исключением суммирования по граничным элементам) скалярного произведения

$$-\sum_{(i,j)}\left(\mathbf{v}_{i,j},\left\langle H\,\mathrm{grad}\,\varphi\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}\right) \text{ или } -\sum_{(i,j)} f_{i,j}\left\langle H\varphi'_{\chi}\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)},$$

что обеспечивает на сеточном уровне справедливость формулы Грина в форме

$$\varphi\,\mathrm{div}(H\mathbf{v}) = \mathrm{div}(\varphi H\mathbf{v}) - (\mathbf{v}, H\,\mathrm{grad}\,\varphi)$$

или применительно к системе мелкой воды [1] в форме

$$(\mathbf{v},-H\,\mathrm{grad}\,e) = -\mathrm{div}(He\mathbf{v}) + e\,\mathrm{div}(H\mathbf{v}) = -\mathrm{div}(He\mathbf{v}) - (H'_t + \sigma)e,$$

которая выражает механизмы изменения потенциальной энергии системы. А соотношения

$$c_{i,j}^{(2)(\chi--)} + c_{i,j}^{(2)(\chi-+)} + c_{i,j}^{(2)(\chi+-)} + c_{i,j}^{(2)(\chi++)} = 0$$

обеспечивают также консервативность аппроксимаций (7) и равенство нулю производной константы $\left\langle Hc'_{\chi}\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)} = 0$.

Но для подстановки в сеточное уравнение неразрывности в конечном итоге нужны аппроксимации производных $\left\langle e'_x\right\rangle_{i,j}^{(2)}$, $\left\langle e'_y\right\rangle_{i,j}^{(2)}$. Определим их следующим образом:

$$\left\langle e'_x\right\rangle_{i,j}^{(2)} = \left\langle He'_x\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)} \Big/ \left\langle Hx'_x\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}, \quad \left\langle e'_y\right\rangle_{i,j}^{(2)} = \left\langle He'_y\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)} \Big/ \left\langle Hy'_y\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}.$$

При единообразном задании $x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ и $y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ в числителе и знаменателе это обеспечивает выполнение на сеточном уровне метрических соотношений $x'_x = y'_y = 1$. Но в отношении выполнения $x'_y = y'_x = 0$ остается в силе сказанное ранее. То есть при $\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\chi_{i,j} + \chi_{i,j+1} + \chi_{i+1,j} + \chi_{i+1,j+1}\right)$ соотношение не выполняется. Можно добиться выполнения соотношения, но придется рассматривать $\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(-)} = \frac{1}{2}\left(\chi_{i,j+1} + \chi_{i+1,j}\right)$ и $\chi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(+)} = \frac{1}{2}\left(\chi_{i,j} + \chi_{i+1,j+1}\right)$ в зависимости от «шахматного цвета» узла, либо вернуться к рассмотрению задания сеточных вектор-функций во внутренних точках граней (ребер) [1].

Но независимо от выполнения метрических соотношений построенные аппроксимации (6), (7) обеспечивают на сеточном уровне знакоопределенность оператора для e, а именно, в скалярном произведении

$$\sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle \mathrm{div}(H\,\mathrm{grad}\,e)\Delta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(2)} e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \text{ или } \sum_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left\langle \left(Hf'_{\chi}\right)'_{\chi}\Delta\right\rangle_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(2)} e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

(за исключением суммирования по граничным элементам) может быть выделено скалярное произведение

$$-\sum_{(i,j)}\left(\left(\left\langle e'_x\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}\right)^2\left\langle Hx'_x\Delta\right\rangle_{i,j} + \left(\left\langle e'_y\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}\right)^2\left\langle Hy'_y\Delta\right\rangle_{i,j}\right) \text{ или } -\sum_{(i,j)}\left(\left\langle e'_{\chi}\Delta\right\rangle_{i,j}^{(2)}\right)^2\left\langle H\chi'_{\chi}\Delta\right\rangle_{i,j}.$$

Заметим, что аппроксимации производных $\left\langle e_x' \right\rangle_{i,j}^{(2)}$, $\left\langle e_y' \right\rangle_{i,j}^{(2)}$ можно определить и следующим образом $\left\langle e_\chi' \right\rangle_{i,j}^{(2)} = \left\langle He_\chi' \Delta \right\rangle_{i,j}^{(2)} \Big/ \left(\overline{H}_{i,j} \Delta_{i,j} \right)$. Это не препятствует знакоопределенности оператора уравнения для возвышения уровня e, но метрические соотношения не выполняются, в том числе и $x_x' = y_y' = 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васильев В.С.* Аппроксимации в системах уравнений мелкой воды на криволинейных сетках // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2007. – № 2 (77). – С. 135-141.
2. *Вольцингер Н.Е.*, *Клеванный К.А.*, *Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.
3. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. – СПб.: Наука, 1991. – 200 с.
4. *Agoshkov V.I.*, *Saleri F.* Recent Developments in the Numerical Simulation of Shallow Water Equations. III – Boundary Conditions and Finite Element Approximations in the River Flow Calculations // Матем. Моделирование. – 1996. – Т. 8, № 9. – С. 3-24.

Васильев Владислав Сергеевич

Технологический институт федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: nvn@vm.tsure.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371606.

Vasiliev Vladislav Sergeevich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: nvn@vm.tsure.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371606.

УДК 551.594

А.А. Редин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНОГО ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ОДНО- И ДВУКРАТНО ЗАРЯЖЕННОГО АЭРОЗОЛЯ

В работе построена модель электрического состояния нестационарного горизонтально-однородного приземного слоя с учетом одно- и двукратно заряженного аэрозоля.

Приземный слой; аэрозоль; ионы; турбулентное перемешивание; электродный эффект; электрическое поле.

A.A. Redin

ELECTRODYNAMIC MATHEMATICAL MODEL OF THE ATMOSPHERIC SURFACE LAYER WITH ONE- AND DOUBLE-CHARGED AEROSOLS

The model of non-stationary horizontally similar surface layer with single- and double-charged aerosols is developed in this paper.

Surface layer; aerosol; ions; turbulent mixing; electrode effect; electric field.