

Краткие сообщения

УДК 681.327.22:621.376.57

П.П. Кравченко, И.С. Павлова

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СПЛАЙНАМИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается вопрос построения на основе дельта-преобразований второго порядка алгоритмов локальных сплайнов, характеризующихся низкой вычислительной трудоемкостью, и использование которых позволяет решать вопросы формирования требуемого характера изменения интерполируемой кривой между узлами интерполяции.

Оптимизированные дельта – преобразования второго порядка; сплайн; интерполяция.

P.P. Kravchenko, I.S. Pavlova

THE MODIFIED ALGORITHMS OF INTERPOLATION BY SPLINES ON THE BASIS OF OPTIMIZED DELTA-TRANSFORMATIONS OF THE SECOND ORDER

In the article the question of construction algorithms of the local splines based on the delta - transformations of the second order, characterized by low computational complexity, and the use of which enables us to solve problems of forming the required character of the variation of the interpolated curve between the points of interpolation is considered.

Optimized delta - transformations of the second order; a spline; an interpolation.

При построении графиков, двух – и трехмерных объектов, рельефов поверхностей в реальном масштабе времени используются интерполяционные и аппроксимирующие сплайны. На практике особый интерес представляет использование интерполяционных сплайнов, характеризующихся низкой вычислительной трудоемкостью и возможностями адаптации к особенностям интерполируемой траектории.

Среди известных сплайнов с низкой вычислительной трудоемкостью можно выделить кубические [1] и на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка [2]. В частности, использование алгоритмов на основе дельта-преобразований второго порядка позволяет обеспечить предельно низкую вычислительную трудоемкость (3 базовых операции сложения) на этапе построения собственно сплайна.

В данной статье рассматривается модифицированный алгоритм построения сплайнов с использованием дельта-преобразований второго порядка, предоставляющий возможности изменения характера интерполируемой кривой, а также уменьшения исходного количества сплайнов.

Сущность алгоритма заключается в формировании сплайна по трем отсчетам, один из которых, расположенный между двумя крайними узлами, вводится как дополнительный. Итоговая интерполяционная кривая проходит через заданные узлы, а так же через вспомогательный отсчет или вблизи от данного отсчета.

Рассматриваемый алгоритм включает в себя два основных этапа: вычисление параметров сплайна (подготовительный этап) и собственно построение сплайновой кривой.

Введем обозначение пар координат узловых точек в виде $((t_n, y_n, \dot{y}_n), (t_{cn}, y_{cn}), (t_{n+1}, y_{n+1}))$, где n – номер узла интерполяции, t_n – независимая переменная, y_n – отсчет в n -ом узле, y_{cn} – дополнительный отсчет, \dot{y}_n – производная в n -ом узле.

Параметры сплайна (квант преобразования P_n и расстояние от узла $(n + 1)$ до точки переключения знака кванта преобразования D_n) на подготовительном этапе вычисляются с использованием приводимых ниже формул:

$$P_n = \frac{-L_n - \text{sign}(L_n) \sqrt{L_n^2 - 4G_n V_n}}{0,5T_n^2};$$

$$D_n = \frac{(y_{n+1} - y_{cn}) / h_n + h_n P_n / 2 - \dot{y}_n + T_n P_n}{2P_n},$$

где

$$L_n = y_{n+1} - y_n - 0,5T_n (\dot{y}_n + (y_{n+1} - y_{cn}) / h_n) - 0,25h_n ((y_{n+1} - y_{cn}) / h_n - \dot{y}_n);$$

$$G_n = (T_n / 2 - h_n / 4)^2 - 2(h_n / 4)^2;$$

$$V_n = -0,25((y_{n+1} - y_{cn}) / h_n - \dot{y}_n)^2;$$

$$h_n = t_{n+1} - t_{cn}; \quad 0 < h_n < 0,8T_n; \quad T_n = t_{n+1} - t_n.$$

Для $(n+1)$ -го сплайна производная \dot{y}_{n+1} определяется в виде:

$$\dot{y}_{n+1} = (y_{n+1} - y_{cn}) / h_n + h_n P_n / 2.$$

Пусть ∇t – шаг дискретизации независимой переменной, N_A – количество дискретных шагов в диапазоне $[t_{n+1}; t_{n+1} - D_n]$, N_B – количество дискретных шагов в диапазоне $[t_n; t_{n+1} - D_n]$.

Пусть на подготовительном этапе помимо отмеченных выше значений P_n и D_n определены также $c_n^* = P_n \nabla t^2$, $\nabla S_{N_A} = \dot{y}_{n+1} \nabla t$, $\nabla S_0 = \dot{y}_n \nabla t$ [2]. Подготовительный этап может быть в вычислительном процессе совмещен во времени с собственно построением сплайновой кривой или предшествовать построению сплайновой кривой с сохранением определяемых параметров.

Из узла $n+1$ строится кривая при движении влево с шагом ∇t на расстояние D_n до точки переключения кванта преобразования (N_A шагов). Расчет выполняется по формулам:

$$Y_{N_A} = y_{n+1};$$

$$\nabla S_{N_A-i-1} = \nabla S_{N_A-i} - c_n^*;$$

$$Y_{N_A-i-1} = Y_{N_A-i} - \nabla S_{N_A-i-1} - 0,5c_n^*,$$

где $i = 0, \dots, N_A - 1$, $N_A = \left\lceil \frac{D_n}{\nabla t} \right\rceil$.

Далее из узла n строится кривая при движении вправо с шагом ∇t на расстояние $(T_n - D_n)$ до точки переключения кванта преобразования (N_B шагов). Расчет выполняется по формулам:

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_n; \\ \nabla S_{i+1} &= \nabla S_i + c_n^*; \\ Y_{i+1} &= Y_i + \nabla S_{i+1} - 0,5c_n^*, \end{aligned}$$

где $i = 0, \dots, N_B - 1$, $N_B = \left\lceil \frac{T_n - D_n}{\nabla t} \right\rceil$.

При использовании алгоритмов с целью формирования определенной направленности сплайна, дополнительный отсчет вводится на основе реальных данных об интерполируемом участке (например, известного аналитического представления интерполируемой функции или нечетких требований к формированию участка кривой и т.п.).

Для обеспечения достаточного качества сплайновой интерполяции целесообразно наряду с рассмотренными алгоритмами использовать также алгоритмы без дополнительного отсчета [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Квасов Б.И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 416 с.
2. Кравченко П.П. Основы теории оптимизированных дельта – преобразований второго порядка. Цифровое управление, сжатие, параллельная обработка информации: Монография. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. – 192 с.

Кравченко Павел Павлович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: kravch@tsure.ru.

347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634314945.

Павлова Ирина Сергеевна

E-mail: irina_p.84@mail.ru.

Kravchenko Pavel Pavlovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: kravch@tsure.ru.

44, Nekrasovski, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +7(8634314945).

Pavlova Irina Sergeevna

E-mail: irina_p.84@mail.ru.