УДК 519.6

В.Е. Долгой

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении различных задач математической физики возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений. Основным источником таких задач являются разностные и конечно-элементные аппроксимации одномерных задач математической физики. Число уравнений в системах может быть более 10, поэтому возникает необходимость разработки параллельных алгоритмов решения. Рассматривается модифицированный алгоритм метода Якоби решения систем линейных алгебраических уравнений. Приводится параллельная реализация данного метода, результаты численных экспериментов.

Модифицированный алгоритм; параллельная реализация; численные эксперименты.

V.E. Dolgoy

PARALLEL REALISATION OF ITERATIVE METHODS OF THE DECISION OF SYSTEMS OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

While solving various problems of mathematical physics it is necessary to solve systems of linear algebraic equations. The main source of such problems are finite difference and finite element approximations of one-dimensional problems of mathematical physics. The number of the equations in systems can be more than 10. Therefore it is necessary to work out the parallel algorithms of the decision. In the given work the modified algorithm of Jakobi's method for solving of the linear algebraic equations systems is considered. Parallel realization of the given method, results of numerical experiments is resulted.

The modified algorithm; parallel realisation; numerical experiments.

Введение. При решении различных задач математической физики возникает необходимость решения трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Основным источником таких задач являются разностные и конечно-элементные аппроксимации одномерных задач математической физики. При этом число уравнений в системах может быть более 10, и однопроцессорный компьютер либо не может их решить из-за нехватки памяти, либо их решение займет много времени, поэтому возникает необходимость разработки параллельных алгоритмов решения.

Системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей возникают в процессе применения локально-двумерных схем расщепления параболических и эллиптических уравнений в задачах математической физики [1]. Кроме того, трехдиагональные матрицы являются интересным математическим объектом и привлекают внимание широкого круга специалистов по вычислительной математике. Именно для трехдиагональных матриц получены самые глубокие результаты линейной алгебры. Эти матрицы играют большую роль в такой области, как разностные методы решения задач математической физики.

Рассмотрим методы оценки эффективности параллельной реализации алгоритма для систем с распределенной памятью. Каждый параллельный алгоритм оценивается по двум параметрам ускорению S_p и эффективности E_p, которые определяются по следующим формулам:

$$S_p = \frac{t_1}{t_p}; \qquad E_p = \frac{S_p}{p},$$

где t_1 – время решения исходной задачи на одном процессоре, t_p – время решения исходной задачи по параллельному алгоритму на p процессорах [2].

В данной работе рассматривается алгоритм метода Якоби решения систем линейных алгебраических уравнений и его модификация, направленная на максимально эффективную реализацию данного алгоритма на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью.

Описание параллельного алгоритма. Рассмотрим параллельную реализацию метода Якоби решения системы линейных уравнений. Пусть дана система линейных уравнений вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица размерности m; $x = (x_1, K, x_m)^T$, $f = (f_1, K, f_m)^T$ – вектора переменных и правой части соответственно. Если все a_{ij} отличны от нуля, то система (1) может быть записана в следующем виде:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, K, m.$$

Такая запись удобна для применения итерационных методов решения системы (1). Метод Якоби состоит из следующих шагов:

1. Произвольным образом выбирается начальное приближение (x_1^0, K, x_m^0) к решению.

2. На n-м шаге очередное приближение вычисляется по формуле

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, K, m.$$

3. Проверяется условие окончания процесса вычислений $\left\| x^{n+1} - x^n \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{n+1} - x_i^n \right)^2} \le \varepsilon$. Если оно выполнено или выполнено заданное количество итераций, то процесс вычислений заканчивается. В противном случае последовательность шагов 2-3 повторяется вновь.

Метод Якоби сходится не всегда. Приведём две стандартные теоремы о сходимости, доказательства которых даны в [3].

Теорема 1. Если матрица A имеет строгое диагональное преобладание или является неприводимой с диагональным преобладанием, то итерации метода Якоби сходятся при любом начальном приближении x^0.

Теорема 2. Если матрица $A = D - B$ симметрична и положительно определена, то итерация метода Якоби сходится при любом начальном приближении x^0 тогда и только тогда, когда матрица $D + B$ положительно определена, где D – диагональная матрица, образованная диагональными элементами A, $B = D - A$, т.е. $A = D - B$ представляет собой разложение матриц на диагональную и внедиагональную части. Вычисление очередного приближения можно записать в матричной форме следующим образом:

$$x^{n+1} = -Bx^n + g,$$

Рассмотрим положительно-определённую матрицу A с диагональным преобладанием, так как $a_{ii} > \sum_{j \ne i} \left| a_{ij} \right|$, то метод Якоби сходится. Для таких матриц условие окончания вычислений будет выполнено после конечного числа итераций при любом начальном приближении. Эту матрицу возьмём в качестве входных данных.

Компоненты правой части f подберём таким образом, чтобы вектор (1, 2, …, m) был решением системы (1). Вычисление различных компонентов очередного приближения может производиться параллельно. При параллельной реализации каждый процессор вычисляет определённую часть элементов очередного приближения.

Результаты численных исследований. На рис. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, проведённого на кластере ТТИ ЮФУ для задачи размерностью 10 000 и точности 0,0001.

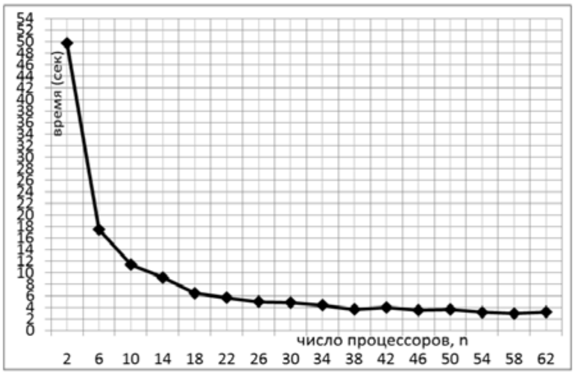

Рис. 1. График зависимости времени от количества процессоров

График показывает зависимость времени (в секундах) от количества участвующих в вычислениях процессоров. В качестве времени работы на одном процессоре взято время работы последовательного алгоритма на одном из узлов кластера. График показывает, что время работы снижается по мере увеличения числа процессоров до 54. Далее наблюдается стабилизация времени работы, что свидетельствует о том, что накладные расходы на передачу данных стали сравнимыми со временем вычислений.

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента для систем разной размерности. В колонках 2,3 приведено время решения систем соответствующей размерности с помощью последовательного и параллельного алгоритма. Колонки 4,5 показывают ускорение и эффективность параллельного алгоритма.

Таблица 1

Ускорение и эффективность параллельного алгоритма

50 процессоров				
Размерность	Время послед. метода, с	Время парал. метода, с	Ускорение, Sp	Эффективность, Ep
1000	2,6459	0,0934	28,32869379	0,566573876
2500	17,2607	0,4513	38,24662087	0,764932417
5000	71,4715	2,2023	32,4531172	0,649062344
7500	143,2668	4,7881	29,92143021	0,598428604
10000	296,8159	8,514	34,86209772	0,697241954
12500	503,5878	14,6529	34,36779068	0,687355814
15000	676,3145	20,8705	32,40528497	0,648105699

Данные, приведенные в табл. 1, демонстрируют высокую эффективность предложенного метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сухинов А.И.* Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: Макс-пресс, 2005. – 407 с.
2. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 599 с.
3. *Хокни Р., Джессхоуп К.* Параллельные ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1986. – 389 с.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент Т.В. Камышникова.

Долгой Вячеслав Евгеньевич
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский 44.
Тел.: 88634371606.
Кафедра высшей математики; аспирант.

Dolgoy Vaycheslav Evgenievich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371606.
The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

УДК 681.03.06

В.В. Хашковский, И.Г. Данилов

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И GRID-ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ И УЧЕБНОЙ РАБОТЕ

Современные технологии зачастую настораживают терминологической разрозненностью и слабой определенностью критериев разграничения различных понятий. Данная работа направлена усиление определенности в области использования понятийного аппарата, описания базовых технологий и их комбинации для применения современных вычислительных архитектур в среде научных и образовательных организаций. Рассматриваются концепции виртуализации, понятия облачных вычислений и грид-вычислений и возможностей их совместного использования.

Облачные вычисления; грид-технологии; коллективное использование вычислительных ресурсов; виртуализация.

V.V. Khashkovsky, I.G. Danilov

APPLICATION OF CLOUD- AND GRID-COMPUTATIONS FOR COLLABORATIVE USE OF COMPUTING RESOURCES IN RESEARCH AND EDUCATION

Modern technology is often alarming terminology fragmentation and weak defined criteria distinguish different concepts. This work is aimed increasing certainty in the use of the terminology describing basic technologies and their combination for the application of modern computing architectures in the medium of scientific and educational organizations.