Ayibazova Aminat Abdullakhovna
Karachai-Cherkess State Thechnological Academy.
E-mail: aibazova_amina@mail.ru.
36, Stavropolskaya Street, Cherkessk, 357100, Russia.
Phone: +7782202387.
The Department of Mathematics; Competitor.

Zargarjan Jury Arturovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University".
E-mail: fin_val_iv@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371773.
The Department of Automatic Control Systems; Postgraduate Student.

УДК 681.518

Е.В. Заргарян

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ РИСКОВ

Рассматриваются элементы теории рисков при задании параметров функционирования объекта и параметров задачи в условиях неопределенности в виде нечетких интервалов. Доказана лемма для представления случайных величин в виде нечетких интервалов.

Рассмотрены часто применяемые в математических моделях нечеткие случайные величины: биномиально распределенная нечеткая случайная величина, распределение Парето и его связь с теорией рисков.

Нечеткие интервалы; распределение Парето.

E.V. Zargarjan

FORMALIZATION PARAMETER PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY WITH APPLICATION OF THE RISKS THEORY

We consider the elements of the theory of risk when setting the parameters of the functioning of the object and the parameters of the problem under uncertainty in the form of fuzzy intervals. Lemma of representation of random variables as fuzzy intervals. Reviewed frequently used in mathematical models of fuzzy random variables: binomial distribution, a fuzzy random variable, the distribution of the pair-and his connection with the theory of risk.

Fuzzy intervals; Pareto distribution.

Достижения научно-технического прогресса реализуются на практике в виде создания производственных систем все более возрастающей сложности. Действующие производственные системы являются воплощением замыслов их создателей и естественным образом проходят традиционные стадии жизненного цикла: прикладные научные исследования, разработка технических требований и технического задания (фаза "Исследование"), эскизное, техническое и рабочее проектирование (фаза "Проектирование"), строительство и изготовление оборудования (фаза "Изготовление"), опытная и промышленная эксплуатация (фаза "Функционирование) и, наконец, модернизация или устранение производственного объекта (фаза "Ликвидация").

При этом для проектов любой степени сложности – от минимальных до особо крупных производственных систем – характерен риск не достичь исходных требований, заложенных в техническом задании, а при реализации – риск нежелательного развития событий, приводящих к непредсказуемым последствиям.

Одним из возможных способов преодоления отмеченного недостатка может быть подход, основанный на рассмотрении и проектировании жизненного цикла производственной системы в целом, а не изолированно по отдельным фазам, перечисленным выше.

Параметры исследуемой системы зачастую невозможно представить в виде четких чисел, так как сложная производственная система является трудноформализуемой и зависит от большого количества параметров, поэтому параметры исследуемой производственной системы необходимо представить в виде нечетких интервалов. Рассмотрим формализацию параметров производственных задач в условиях неопределенности с применением теории рисков.

Классические работы по моделям рисков дают следующую классификацию моделей риска [1]:

- модель индивидуального риска;
- модель коллективного риска, (динамическая модель).

При анализе рисков, при построении математических моделей рисков важными проблемами являются:

- установление причинных и следственных взаимосвязей разных рисков;
- установление и построение модели вероятностных распределений и вероятностных характеристик рисков;
- установление тяжести материальных потерь при наступлении страхового случая.

Для формализации параметров рассматриваемой производственной системы необходимо использовать понятие нечеткого интервала.

Нечёткий интервал – это неопределенное множество $\widetilde{A} \subseteq R$ со средним интервалом, чьи элементы обладают функцией принадлежности $\mu_{A(x)} = 1$. Как и для нечётких чисел, функция принадлежности должна быть выпуклой, нормализованной и по крайней мере кусочно-непрерывной.

В различных практических приложениях могут применяться разнообразные классы случайных величин как дискретных, так и (абсолютно) непрерывных случайных величин [2].

В прикладной математике [2,3] часто индивидуальный риск в условиях неопределенности $\widetilde{X}$ представляют в виде $\widetilde{X} = I(\widetilde{A}) \cdot \widetilde{Y}$, в котором нечеткая случайная величина $I(\widetilde{A})$ (называется индикатор события $\widetilde{A}$) принимает нечеткое значение *(1,1,0,0)* при наступлении нечеткого случайного события $\widetilde{A}$ и нечеткое значение *(0,0,0,0)* при не наступлении $\widetilde{A}$. Нечеткая случайная величина $\widetilde{Y}$ описывает величину реально предъявленного производственной компании риска. Легко видеть, что

$$\tilde{P}(\tilde{I} = (0,0,0,0)) = \tilde{P}(\tilde{X} = (0,0,0,0)),$$

$$\tilde{P}(\tilde{I} = (1,1,0,0)) = \tilde{P}(\tilde{X} > (0,0,0,0)),$$

$$\tilde{P}(\tilde{Y} < \tilde{y}) = \tilde{P}(\tilde{X} < \tilde{y} / \tilde{X} > (0,0,0,0)).$$

В частности, если нечеткая случайная величина $\widetilde{X}$ дискретного типа, то выполнятся равенства [4,5]:

$$\tilde{P}(\tilde{Y} = \tilde{a}_k) = \tilde{P}(\tilde{X} = \tilde{a}_k / \tilde{X} > (0{,}0{,}0{,}0)) = \frac{\tilde{P}(\tilde{X} = \tilde{a}_k)}{1 - \tilde{P}(\tilde{X} = (0{,}0{,}0{,}0))}, \; k = 1{,}2{,}...$$

при каждом возможном нечетком значении $\tilde{a} > 0$.

Нечеткий риск часто записывают в виде суммы нечеткого случайного числа $\tilde{\nu}$ случайных нечетких слагаемых $\tilde{X}_1,....,\tilde{X}_\nu$. Весьма типичны в этих моделях требования взаимной независимости и одинаковой функции принадлежности нечетких случайных величин $\tilde{X}_1,....,\tilde{X}_\nu$.

В общем курсе теории вероятностей известен следующий результат о вычислении первых моментов для суммы случайного числа случайных величин.

1. Лемма (тождество А. Вальда) для представления случайных величин в виде нечетких интервалов.

Пусть дано нечеткое случайное число $\tilde{\nu}$ взаимно независимых и одинаковой функции принадлежности нечетких случайных величин $\tilde{X}_1,....,\tilde{X}_\nu$, причем $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_\nu$ и существуют нечеткое математическое ожидание $\tilde{B}(\tilde{X})$ и дисперсия $\tilde{D}(\tilde{X})$.

Тогда справедливы нечеткие равенства:

$$\tilde{E}(\tilde{X}) = \tilde{E}(\tilde{\nu}) \cdot \tilde{E}(\tilde{X}_1), \tilde{D}(\tilde{X}) = \tilde{E}(\tilde{\nu}) \cdot \tilde{D}(\tilde{X}_1) + \tilde{D}(\tilde{\nu}) \cdot (\tilde{E}(\tilde{X}_1))^2; \quad (1)$$

Доказательство:

Вычислим нечеткую функцию принадлежности случайной величины $\tilde{X}$ с помощью формулы полной вероятности:

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{P}(\tilde{X} < \tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \tilde{P}(\tilde{X} < \tilde{x} / \tilde{\nu} = \tilde{k}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \tilde{P}(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k / \tilde{\nu} = \tilde{k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \tilde{F}_k(\tilde{x}), \quad (2)$$

где

$$\tilde{F}_k(\tilde{x}) = \tilde{P}(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k < \tilde{x} / \tilde{\nu} = \tilde{k}) = \tilde{P}(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k < \tilde{x}), \quad (3)$$

поэтому

$$\tilde{E}(\tilde{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x} d\tilde{F}(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x} d\tilde{F}_k(\tilde{x}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \tilde{E}(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{k} \tilde{E}(\tilde{X}_1) \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) =$$
$$= \tilde{E}(\tilde{X}_1) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{k} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) = \tilde{E}(\tilde{X}_1) \tilde{E}(\tilde{\nu}).$$

Аналогичные нечеткие преобразования позволяют выразить второй нечеткий начальный момент для $\tilde{X}$ в виде

$$\tilde{E}(\tilde{X}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2 d\tilde{F}(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2 d\tilde{F}_k(\tilde{x}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) \tilde{E}((\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k)^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) (\sum_{i=1}^{k} \tilde{E}(\tilde{X}_i^2) + 2 \sum_{1 \le j < i \le k} \tilde{E}(\tilde{X}_j \tilde{X}_i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \{ k\tilde{E}(\tilde{X}_1^2) + \frac{k(k-1)}{2} (\tilde{E}(\tilde{X}_1))^2 \} \tilde{P}(\tilde{\nu} = \tilde{k}) =$$

$$= \tilde{E}(\tilde{X}_1^2) \tilde{E}(\tilde{\nu}) + (\tilde{E}(\tilde{X}_1))^2 \tilde{E}(\tilde{\nu}(\tilde{\nu} - (1,1,0,0))),$$

таким образом, для дисперсии следует цепочка равенств

$$\tilde{D}(\tilde{X}) = \tilde{E}(\tilde{X}^2) - (\tilde{E}(\tilde{X}))^2 =$$

$$= \tilde{E}(\tilde{X}_1^2) \tilde{E}(\tilde{\nu}) + (\tilde{E}(\tilde{X}_1))^2 \tilde{E}\{\tilde{\nu}(\tilde{\nu} - (1,1,0,0))) - (\tilde{E}(\tilde{X}) \tilde{E}(\tilde{\nu}))^2 =$$

$$= \tilde{E}(\tilde{X}^2) \tilde{E}(\tilde{\nu}) + \tilde{E}^2(\tilde{X}) \{ \tilde{E}(\tilde{\nu}^2) - \tilde{E}(\tilde{\nu}) \} - \tilde{E}^2(\tilde{X}) \tilde{E}^2(\tilde{\nu}) =$$

$$= \tilde{E}(\tilde{\nu}) \tilde{D}(\tilde{X}) + (\tilde{E}(\tilde{X}))^2 \tilde{D}(\tilde{\nu}).$$

Следовательно, лемма доказана.

Некоторые часто применяемые в математических моделях нечеткие случайные величины:

а) Биномиально распределенная нечеткая случайная величина $\tilde{X}$ – это целочисленная нечеткая случайная величина, функция принадлежности которой задается равенством [6]:

$$\tilde{P}(\tilde{X} = \tilde{k}) = C_n^k p^k ((1,1,0,0) - p)^{n-k}, k = 0,1,...n, 0 \le p \le 1$$

Этот факт часто для краткости записывают в форме $\tilde{X} \in \tilde{B}n(n, p)$.

Отметим важное для разных приложений свойство нечеткой биномиальной функции принадлежности:

Если независимые случайные величины имеют нечеткую биномиальную функцию принадлежности $\tilde{X} \in \tilde{B}n(N, p), \tilde{Y} \in \tilde{B}n(K, p)$, то функция принадлежности суммы $\tilde{X} + \tilde{Y} \in \tilde{B}n(N + K, p)$. Одно из применений этого свойства – возможность в простом выводе следующего свойства, если $\tilde{X} \in \tilde{B}n(n, p)$, то имеет место представление $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + ... + \tilde{X}_n$, в котором все слагаемые – взаимно независимые нечеткие случайные величины, $\tilde{X}_i \in \tilde{B}n((1,1,0,0), p), i = 1,2,...,n.$

$$\tilde{E}(\tilde{X}) = \tilde{E}(\tilde{X}_1) + ... + \tilde{E}(\tilde{X}_n) = n\tilde{E}(\tilde{X}_1) = np,$$

$$\tilde{D}(\tilde{X}) = \tilde{D}(\tilde{X}_1) + ... + \tilde{D}(\tilde{X}_n) = n\tilde{D}(\tilde{X}_1) = np((1,1,0,0) - p).$$

б) Распределение Парето. Нечеткая случайная величина $\tilde{X}$ имеет функцию принадлежности Парето с параметрами $\tilde{\alpha} > 0,\ \tilde{\lambda} > 0$,если ее нечеткая функция принадлежности задается равенством [4]

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{\alpha}+(1,1,0,0)}, \quad \tilde{x} > 0.$$

Легко вычислить среднее и дисперсию в условиях неопределенности:

$$\tilde{E}(\tilde{X}) = \int_0^\infty \tilde{x}\tilde{f}(\tilde{x})dx = \int_0^\infty \tilde{x}\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{\alpha}+1}dx = \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{\alpha}}dx = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}-1},$$

$$\tilde{E}(\tilde{X}^2) = \int_0^\infty \tilde{x}^2\tilde{f}(\tilde{x})dx = \int_0^\infty \tilde{x}^2\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{\alpha}+1}dx = 2\int_0^\infty \tilde{x}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{\alpha}}dx = \frac{2\tilde{\lambda}^2}{(\tilde{\alpha}-2)(\tilde{\alpha}-1)^2}.$$

$$\tilde{D}(\tilde{X}) = \frac{(2,2,0,0)\tilde{\lambda}^2}{(\tilde{\alpha}-(2,2,0,0))(\tilde{\alpha}-(1,1,0,0))^2} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{(\tilde{\alpha}-(1,1,0,0))^2} = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}^2}{(\tilde{\alpha}-(2,2,0,0))(\tilde{\alpha}-(1,1,0,0)^2)}.$$

Нечеткое математическое ожидание распределения Парето бесконечно при $\tilde{\alpha} > 1$, а дисперсия бесконечна при $\tilde{\alpha} > 2$. Отметим, что поскольку нечеткая экспонента убывает быстрее степенной функции, то функции принадлежности Парето соответствует более частое появление больших рисков. Чтобы сравнить с экспоненциальным распределением, достаточно проверить, что при $\tilde{\alpha} = 3$

$$\tilde{P}(\tilde{X} > 10\tilde{E}(\tilde{X})) = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+\frac{10\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}-(1,1,0,0)}}\right)^{\tilde{\alpha}} = \left(\frac{\tilde{\alpha}-(1,1,0,0)}{\tilde{\alpha}}\right)^2 = (0.006, 0.006, 0, 0).$$

Если сравнивать гамма распределение и функцию принадлежности Парето, то иски большой величины с меньшей вероятностью будут появляться при гамма-распределении, чем при функции принадлежности Парето.

О связи функции принадлежности Парето и гамма-распределения [5].

Хорошим примером этого является широко применяемый пример нечеткой рандомизации показательного распределения по смешивающему гамма-распределению [6]. Более конкретно, пусть

$$\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{d}{dx}\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{\vartheta}) = \tilde{\vartheta}e^{-\tilde{x}\tilde{\vartheta}},$$

$$\tilde{g}(\tilde{y}) = \frac{d}{dx}\tilde{G}(\tilde{y}) = \frac{\tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\Gamma}(\tilde{\alpha})}\tilde{y}^{\tilde{\alpha}-1}e^{-\tilde{\lambda}\tilde{y}},\ \tilde{y} > (0,0,0,0)$$

Тогда

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \int_0^\infty \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{g}(\tilde{y})dy = \int_0^\infty \tilde{y}e^{-\tilde{x}\tilde{y}}\frac{\tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\Gamma}(\tilde{\alpha})}\tilde{y}^{\tilde{\alpha}-(1,1,0,0)}e^{-\tilde{y}\tilde{\lambda}}dy =$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}^{\tilde{\alpha}}}{(\tilde{x}+\tilde{\lambda})^{\tilde{\alpha}+(1,1,0,0)}} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{x}+\tilde{\lambda}}\right)^{\tilde{\alpha}+(1,1,0,0)}.$$

Получившееся выражение определяет функцию принадлежности Парето. Таким образом, можно указать условия, при которых возможно применение функции принадлежности Парето.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Саати Т.Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

2. *Gogus O., Boucher T.O.* A consistency test for rational weights in multi-criterion decision analysis with fuzzy pair wise comparisons // Fuzzy sets and Systems. – 1977. – Vol. 86. – P. 129-138.
3. *Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силаев Б.В., Тарасов Б.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
4. *Заргарян Е.В.* Многокритериальная задача нечеткой максимизации независимых критериев // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 5 (94). – С. 117-122.
5. *Заргарян Е.В., Айбазова А.А.* Многокритериальный выбор с применением нечеткого попарного сравнения // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 1 (102). – С. 100-104.
6. *Заргарян Ю.А., Затылкин В.В.* Многокритериальное принятие решений по данным опроса мнений // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 1 (102). – С. 104-110.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Заргарян Елена Валерьевна
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: fin_val_iv@tsure.ru
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634371773.
Кафедра систем автоматического управления; доцент.

Zargarjan Elena Valerevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: fin_val_iv@tsure.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634371773.
The Department of Automatic Control Systems; Associate Professor.

УДК 681.142.34

В.В. Соловьев, В.И. Финаев

МОДЕЛЬ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Выполнен анализ форм математических моделей. Приведена структура ПД-регулятора с нечеткой логикой. Разработана структурная схема локальной системы регулирования. Определены аналитические выражения для треугольных функций принадлежности. Разработана и скорректирована база правил нечеткого ПД-регулятора. Разработан алгоритм блока коррекции выходного сигнала регулятора. Выполнено исследование замкнутой системы с нечетким ПД-регулятором в среде MatLab Simulink. Выполнена оценка показателей качества управления.

Регулятор с элементами нечеткой логики; коррекция выходного сигнала.

V.V. Soloviev, V.I. Finaev

MODEL OF THE CONTROLLER FOR LOCAL SYSTEMS OF REGULATION WITH APPLICATION OF METHODS OF THE ARTIFICIAL INTELLECT

The analysis of forms of mathematical models is made. The structure of the PD-regulator with fuzzy logic is resulted. The block diagramme of local system of regulation is developed. Analytical expressions for the triangular membership functions are defined. The rule base of a fuzzy PD-controller is developed and corrected. The algorithm of the block of correction for output