УДК 681.3.06:681.323(519.6)

Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц

КУСОЧНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Кусочная линеаризация задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) строится на основе интерполяционного полинома Ньютона. Коэффициенты полинома восстанавливаются по его корням с использованием параллельного алгоритма. На текущем подынтервале по разностным приближениям интерполируется правая часть ДУ, вычисляются коэффициенты интерполяционного полинома, решение приближается с помощью его первообразной. Процесс итеративно повторяется до минимизации погрешности приближения правой части.

Кусочная линеаризация; полином Ньютона; задача Коши; обыкновенные дифференциальные уравнения.

Ya.E. Romm, G.A. Dzhanunts

PIECEWISE LINEARIZATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Piecewise linearization of the Cauchy problem for the ordinary differential equations (DE) is based on Newton's interpolation polynomial. The polynomial coefficients are reconstructed from its roots, using the parallel algorithm. At the current subinterval on difference approximations the right part DE is interpolated, coefficients of the interpolation polynomial are calculated, the solution is approaching with its primitive. The process is repeated iteratively until the approximation error of the right side is minimized.

Piecewise linearization; Newton's interpolation polynomial; Cauchy problem; ordinary differential equations.

Известные методы линеаризации позволяют преобразовать задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к линейному виду. Однако проблема линеаризации сохраняется при ограничениях на точность такой линеаризации и при требовании достаточного числа производных от правой части [1]. Ниже рассматривается вопрос о построении линеаризации задачи Коши на основе разностных методов при помощи кусочно-полиномиальной интерполяции разностных значений в ограничениях общего вида. Специфика метода, посредством которого достигается искомая точность линеаризации, обсуждается применительно к моделированию процессов, описываемых с помощью ОДУ.

Описание исходного метода кусочно-полиномиальной аппроксимации функций. Исходным для излагаемого подхода является метод кусочно-полиномиальной аппроксимации функций на основе интерполяционного полинома Ньютона [2]. Аппроксимация действительной функции $u = u(x)$ от одной действительной переменной на произвольном промежутке $[\alpha, \beta]$ выполняется следующим образом. Выбирается система подынтервалов равной длины, объединение которых покрывает $[\alpha, \beta]$:

* Работа поддержана грантом РФФИ по проекту № 10-07-00178а от 2010 г.

$$\left[\alpha, \beta\right] = \bigcup_{i=0}^{P-1}\left[x_i,\, x_{i+1}\right], \tag{1}$$

для определенности принимается $P = 2^k$, $k \in \{0,1,\ldots\}$. Пусть априори задана граница ε абсолютной погрешности аппроксимации функции. При каждом i на i-м подынтервале из (1) строится интерполяционный полином Ньютона $\Psi_{in}(t)$ с равноотстоящими узлами, где $t = \dfrac{x - x_i}{h}$, $h = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{n}$ – расстояние между узлами. Степень полинома n выбирается одинаковой на всех подынтервалах и минимальной при условии:

$$\left|u(x) - \Psi_{in}(t)\right| \le \varepsilon, \quad x \in \left[x_i,\, x_{i+1}\right], \quad i = \overline{0,\, P-1}.$$

Полином Ньютона преобразуется к каноническому виду с числовыми коэффициентами: $\Psi_{in}(t) = P_{in}(x)$, $t = \dfrac{x - x_i}{h}$,

где

$$P_{in}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_{i\ell}\, x^{\ell}, \quad x \in \left[x_i,\, x_{i+1}\right], \quad i = \overline{0,\, P-1}. \tag{2}$$

С этой целью рассматриваемый полином записывается в виде

$$\Psi_{in}(t) = u(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j u_{i0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1}(t-k), \quad t = \frac{x - x_{i0}}{h},$$

где $x_{ij} = x_i + jh$, $j = \overline{0,\, n}$, – узлы интерполяции, $\Delta^j u_{i0}$ – конечная разность j-го порядка в точке x_{i0}. Вычисляются конечные разности $\Delta u_{i0} = u(x_{i1}) - u(x_{i0})$, $\Delta^k u_{i0} = \Delta^{k-1} u_{i1} - \Delta^{k-1} u_{i0}$, $k = \overline{2,\, n}$, значения которых обозначаются

$$b_{ij} = \Delta^j u_{i0}, \ j = \overline{1,\, n}.$$

В этих обозначениях

$$\Psi_{in}(t) = u(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\prod_{k=0}^{j-1}(t-k)}{j!}. \tag{3}$$

Каждое произведение $P_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1}(t-k)$ является полиномом, заданным разложением на множители, где $k = \overline{0,\, j-1}$ его нули, по которым можно восстановить коэффициенты: $P_j(t) = d_{j0} + d_{j1} t + d_{j2} t^2 + \ldots + d_{jj} t^j$. Ниже используются обозначения $z_\ell = \ell$, $\ell = \overline{0,\, j-1}$. Применяется отличное от формулы Виета соотношение:

$$\begin{pmatrix} d_{jj} \\ d_{j(j-1)} \\ \dots \\ d_{j0} \end{pmatrix} = \prod_{\ell=1}^{j} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z_{j-\ell} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z_{j-\ell} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -z_{j-\ell} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -z_{j-\ell} \end{matrix}}_{j-\ell+1} \right). \tag{4}$$

Доказательство (4), инвариантный относительно номера коэффициента алгоритм вычисления и программная реализация приводятся в [3].

Найденные согласно (4) коэффициенты $d_{j\ell}$, $\ell = \overline{0,\ j}$, можно сохранить в памяти компьютера для любой необходимой степени j, что предполагается ниже.

Полином (3) переводится в (2) приведением подобных с заменой переменной:

$$\Psi_{in}(t) = a_{i0} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} t^{\ell}, \tag{5}$$

где

$$a_{i0} = u(x_{i0}), \qquad a_{i\ell} = \sum_{j=\ell}^{n} \frac{b_{ij} d_{j\ell}}{j!}. \tag{6}$$

Как показывает эксперимент, при сравнительно общих условиях достигается точность приближения функций с границей погрешности порядка 10^{-20} [2].

Табличные производную и первообразную полинома (5) можно использовать для аппроксимации производной от функции и определенного интеграла:

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\, a_{i\ell} t^{\ell-1}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} u(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{P-1} \int_{0}^{n} \Psi_{in}(t)dt = h \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_{i\ell} n^{\ell+1}}{\ell+1}.$$

Высокая точность такой аппроксимации подтверждается численным экспериментом [2].

Изложенный метод непосредственно применим для быстрого вычисления функций в правых частях ОДУ, однако ниже он видоизменяется для аппроксимации всей правой части, приближения решения на основе первообразной от аппроксимирующего полинома и для линеаризации задачи Коши.

Кусочно-полиномиальное приближение правой части и решения задачи Коши с использованием разностных методов. Пусть для простоты рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}, \tag{7}$$

которую требуется решить на произвольно фиксированном промежутке $[a, b]$. Предполагается, что на $[a, b]$ выполнены все условия существования и единственности решения задачи Коши. С целью избежания несущественных оговорок предполагается, что длина промежутка $[a, b]$ кратна описываемой ниже величине hn. Кусочно-полиномиальное приближение видоизменяется для решения задачи Коши с применением разностных методов следующим образом.

На $[a, b]$ строится система пересекающихся подынтервалов равной длины

$$\left[a, b\right] = \bigcup_{i=0}^{T-1} \left[x_i, x_{i+1}\right], \tag{8}$$

где для всех i из (8) выполняется

$$x_{i+1} = x_i + hn, \;\; x_0 = a, \;\; x_T = b, \tag{9}$$

где n – степень конструируемого интерполяционного полинома, $h = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{n}$ – шаг интерполяции на i-м подынтервале, который совпадает с шагом разностного метода.

Номер подынтервала i интерпретируется как номер i-й группы из $n+1$ шагов, на которых строится текущая интерполяция решения. Ввиду кратности $b-a$ и hn выполняется равенство $T = \dfrac{b-a}{hn}$.

Пусть $a_i = x_i$, $b_i = x_{i+1}$, где x_i, x_{i+1} из (8), (9). Приближенное решение задачи (7) на $\left[a, b\right]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах $\left[a_i, b_i\right]$, $i = \overline{0, T-1}$, где значение функции в начальной точке каждого подынтервала равно её значению в конечной точке предыдущего подынтервала: $y\left(a_i\right) = y\left(b_{i-1}\right)$.

В соответствии с формулой (9) и принятыми обозначениями отрезок $\left[a_i, b_i\right]$ разбивается на n равных частей узлами интерполяции:

$$x_{ip} = a_i + ph, \;\; p = \overline{0, n}. \tag{10}$$

В каждом из узлов (10) вычисляются значения правой части дифференциального уравнения, которые рассматриваются как значения в узлах интерполяции

$$\varphi_{ip} = f\left(x_{ip}, y_{ip}\right), \;\; p = \overline{0, n},. \tag{11}$$

где значения y_{ip}, $p = \overline{1, n}$ определяются по разностному методу, например по методу Эйлера:

$$y_{ip} = y_{i(p-1)} + h \cdot f\left(x_{i(p-1)}, y_{i(p-1)}\right), \;\; p = \overline{1, n}., \tag{12}$$

По условиям (11) строится интерполяционный полином Ньютона степени n относительно независимой переменной x, который в общем случае по схеме (3)–(6) приводится к виду полинома с числовыми коэффициентами:

$$\psi_{in}\left(x\right) = a_{i0} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \left(\frac{x - x_{i0}}{h}\right)^{\ell}, \tag{13}$$

где $a_{i0} = \varphi_{i0}$, $a_{i\ell} = \sum\limits_{j=\ell}^{n} \dfrac{b_{ij} d_{j\ell}}{j!}$, $b_{ij} = \Delta^j \varphi_{i0}$.

Полином (13) интерполирует функцию правой части (7), приближая производную искомого решения. Приближение решения строится как первообразная от (13) с постоянной, принимающей значение y_{i0}. Построенный полином

$$\mathrm{Z}_i(x) = \int_{x_{i0}}^{x} \psi_{in}(x)dx = y_{i0} + h\sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_{i\ell}}{\ell+1}\left(\frac{x - x_{i0}}{h}\right)^{\ell+1} \tag{14}$$

принимается за приближение $y(x)$ на i -м подынтервале:

$$y(x) \approx \mathrm{Z}_i(x),\ \ x \in \left[a_i, b_i\right]. \tag{15}$$

Полином (14) вычисляется по схеме Горнера с заменой $t = \dfrac{x - x_{i0}}{h}$:

$$\mathrm{Z}_i(t) = \left(\ldots\left(\left(\frac{a_{in}}{n+1}t + \frac{a_{i(n-1)}}{n}\right)t + \frac{a_{i(n-2)}}{n-1}\right)t + \ldots + \frac{a_{i0}}{1}\right)t\,. \tag{16}$$

Наличие коэффициентов (13) влечет готовые коэффициенты для (16). Аналогичное приближение строится на $\left[a_{i+1}, b_{i+1}\right]$ и т. д., до исчерпания промежутка $[a, b]$.

Приближение решения существенно уточняется путем неоднократного решения задачи на подынтервале, где значения y_{ip} в (11) вычисляются не разностным методом, а с помощью построенного на текущем подынтервале полиномиального приближения (14), полученного на предыдущей итерации. Дополнительная точность достигается программной оптимизацией степени интерполяционного полинома и шага разностного метода [4]. Очевидно, в качестве исходного разностного метода можно выбрать метод более высокого порядка.

Численный эксперимент, подтверждающий высокую точность приближения решения задачи Коши для систем ОДУ, приводится в [4].

Описанное разностно-полиномиальное приближение решения и правой части задачи Коши используется непосредственно для построения линеаризации.

Кусочно-полиномиальная линеаризация задачи Коши. Путь требуется линеаризовать систему ОДУ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \\ &Y(x_0) = Y_0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $F(x, Y) = \left(f_1(x, Y),\ f_2(x, Y), ..., f_N(x, Y)\right)$, $Y = \left(y_1(x),\ y_2(x), ..., y_N(x)\right)$, $Y_0 = \left(y_{01},\ y_{02}, ..., y_{0N}\right)$, на промежутке $[a, b]$ в предположении существования и единственности решения. Для решения поставленной задачи систему (17) требуется представить в виде

$$\frac{dY}{dx} \approx \tilde{A}\cdot Y + \tilde{b}\,, \tag{18}$$

где матрица $\tilde{A}$ и вектор $\tilde{b}$ линейно зависят от x, решение системы (18) приближает решение системы (17). Искомая линеаризация выполнима на подынтервалах вида (8) с наперед заданной границей погрешности в следующем смысле:

$$\frac{dY}{dx} \approx \tilde{A}_i \cdot Y, \quad \tilde{b}_i = 0, \ i = \overline{0, T-1},$$

где T из (8), элементы $\tilde{A}_i$ приближают компоненты производных, деленных на компоненты решения, $\frac{dy_\ell}{dx} \approx \frac{\psi_{\ell ni}(x)}{y_\ell} y_\ell$, $\ell = \overline{1, N}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, T-1}$, $\psi_{\ell ni}(x)$ из (13). Согласно (14) $y_\ell \approx Z_{\ell i}(x)$, $\ell = \overline{1, N}$. Отсюда $\frac{dy_\ell}{dx} \approx \frac{\psi_{\ell ni}(x)}{Z_{\ell i}(x)} y_\ell$, $\ell = \overline{1, N}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, T-1}$, или, в матричной записи,

$$\frac{dY}{dx} \approx \begin{pmatrix} \frac{\psi_{1ni}(x)}{Z_{1i}(x)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\psi_{2ni}(x)}{Z_{2i}(x)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\psi_{Nni}(x)}{Z_{Ni}(x)} \end{pmatrix} \cdot Y, \quad \begin{matrix} x \in [x_i, x_{i+1}], \\ i = \overline{0, T-1}. \end{matrix} \tag{19}$$

При моделировании процесса с помощью задачи Коши для ОДУ кусочно-полиномиальные приближения решения можно строить параллельно для множества различных начальных значений и множества границ погрешности. Моделирующие решения воспроизводятся параллельно по множеству подынтервалов – достаточно одновременно считать из памяти хранимые коэффициенты интерполирующих решение полиномов. Линеаризация (19) влечет возможность компьютерного анализа устойчивости решений систем ОДУ путем вычисления соответственных матричных произведений [5] на основе (19) параллельно по всем подынтервалам с использованием схем сдваивания, все коэффициенты полиномов из (19) в этом случае априори известны.

Численное моделирование с помощью данного метода характеризуется малой временной сложностью, обладает резервом быстродействия на основе параллелизма метода и использования памяти компьютера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. – 640 с.
2. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций: Автореф. дис. … канд. техн. наук. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2008.
3. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 161-174.
4. *Ромм Я.Е., Джанунц Г.А.* Компьютерный метод разностно-аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений на основе интерполяционного полинома Ньютона / ТГПИ. – Таганрог, 2009. – 40 с. Деп. в ВИНИТИ 18.06.09, № 379-В2009.
5. *Ромм Я.Е.* Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 2008. – № 12. – С. 105-118.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Ромм Яков Евсеевич
Таганрогский государственный педагогический институт.
E-mail: romm@List.ru.
347926, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48.
Тел: 8634601899.
Кафедра информатики; заведующий кафедрой; д.т.н.; профессор.

Джанунц Гарик Апетович
E-mail: janunts@inbox.ru.
Тел.: +79185069024.

Romm Yakov Evseevich
Taganrog State Pedagogical Institute.
E-mail: romm@List.ru.
48, Initsiativnaya Street, Taganrog, 347926, Russia.
Phone: +7634601899.
The Department of Information; Head the Department; Dr. of Eng. Sc.; Professor.

Dzhanunts Garik Apetovich
E-mail: janunts@inbox.ru.
Phone: +79185069024.
The Department of Information; Postgraduate Student.

УДК 621.391:519.21

Е.В. Моисеева

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБЪЕКТА ПО ЕГО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМ, ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ОБУЧЕНИЯ НА ТРЕНАЖЕРНОМ СТЕНДЕ

Представлен метод идентификации реальной переходной характеристики, полученной с помощью учебного тренажерного комплекса "Иерархическая автоматизированная система контроля и управления процессом нагрева". Идентификация является обязательным элементом и наиболее сложной стадией процесса решения прикладных задач. В общем виде задача идентификации заключается в определении оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные.

Идентификация; транспортное запаздывание; набор инерционных звеньев; учебный тренажерный стенд.

E.B. Moiseeva

ALGORITHM OF IDENTIFICATION OF THE INDUSTRIAL OBJECT WITH ITS CHARACTERISTICS FOR TIME AND FREQUENCY FOR PURPOSES OF LEARNING ON TRAINING STAND

Presented a method to identify the actual transfer characteristic obtained through academic training complex, "Hierarchical self-matizirovannaya control and manage the process of heating. Iden-Katsia is a must and the most difficult stage in the process of solving practical problems. In general, the identification problem is to identify the operator of a facility that converts the input actions on the weekend.Identification; distance-velocity lag; set of inertial links; educational training stand.

Identification; distance-velocity lag; set of inertial links; educational training stand.