

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. *Пьявченко Т.А.* Метод идентификации промышленного объекта по его временной и частотной характеристикам // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 7 (108). – С. 216-219.
2. Курсовое и дипломное проектирование по автоматизации производственных процессов: Учебное пособие для вузов по спец. “Автоматизация и комплексная механизация химико-технологических процессов” / И.К. Петров, Д.П. Петелин, М.С. Тюльпанов и др.; Под ред. И.К. Петрова. – М.: Высш. шк., 1986. – 352 с.
3. *Симою М.П.* Определение коэффициентов передаточных функций по временным характеристикам линеаризованных систем // Автоматика и телемеханика. – 1957. – Т. XVIII, № 6.
4. *Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В.* Идентификация объектов управления: Учебное пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 211 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Моисеева Елена Викторовна

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: leskor1986@yandex.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634371773.

Кафедра систем автоматического управления; соискатель.

Moiseeva Elena Viktorovna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: leskor1986@yandex.ru.

44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634371773.

The Department of Automatic Control Systems; Competitor.

УДК 681.3.06:681.323(519.6)

Я.Е. Ромм, А.Н. Голиков

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТЬЮ*

Предлагается модификация кусочно-полиномиальной схемы аппроксимации функций с применением к приближённому вычислению определённых интегралов. Отрезок разбивается на подынтервалы, на каждом из которых функция аппроксимируется средним арифметическим полиномов Ньютона для интерполирования вперёд и назад. Аппроксимирующей полином приводится к каноническому виду, первообразная от него применяется для приближённого вычисления определённых интегралов. Число подынтервалов и степень полинома подбираются программно таким образом, чтобы минимизировать абсолютную погрешность аппроксимации подынтегральной функции, что влечет повышенную точность вычисления определённых интегралов. Приводятся сравнительные результаты численных экспериментов.

Кусочно-полиномиальная схема; интерполяция по Ньютону; приближенное вычисление определённых интегралов.

* Работа поддержана грантом РФФИ по проекту № 10-07-00178а от 2010 г.

Ya.E. Romm, A.N. Golikov

**PIECEWISE-POLYNOMIAL EVALUATION SCHEME OF FUNCTIONS
AND DEFINITE INTEGRALS WITH HIGH ACCURACY**

The paper proposes a modification of the piecewise polynomial approximation scheme functions with application to approximate computation of definite integrals. The entire segment is divided into subintervals, in each of them function is approximated by the arithmetic average of Newton polynomials to interpolate back and forth. Approximating polynomial is reduced to the canonical form, then primitive is applied for an approximate calculation of definite integrals. The number of subintervals and degree of a polynomial chosen in a such program way as to minimize the absolute error of approximation that allows us to achieve higher accuracy in the approximate calculation of definite integrals. The results of numerical experiments and comparison with other schemes are reduced.

Piecewise-polynomial scheme; Newton interpolation; approximation of definite integrals.

При моделировании нанопроцессов, сейсмических явлений, реакторов типа РБМК, процессов тепломассопереноса и других возникает необходимость приближённого вычисления определённых интегралов с повышенной точностью.

В статье предлагается модификация кусочно-полиномиальной схемы аппроксимации функций и определённых интегралов на базе полинома Ньютона для интерполяции вперёд [1]. Суть модификации заключается в следующем.

Рассматривается действительная функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

на отрезке $[a, b]$ в действительной области определения, который разбивается системой непересекающихся подынтервалов

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{P-2} [x_i, x_{i+1}) \cup [x_{P-1}, x_P], \tag{2}$$

где $P = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $x_0 = a$, $x_P = b$. На каждом подынтервале (2) функция аппроксимируется полиномом

$$P_{ni}(x) = \frac{P_{ni}^*(x) + \tilde{P}_{ni}(x)}{2}, \tag{3}$$

где i – номер подынтервала, $P_{ni}^*(x)$ и $\tilde{P}_{ni}(x)$ – полиномы Ньютона для интерполяции вперёд и назад соответственно. Полиномы $P_{ni}^*(x)$ и $\tilde{P}_{ni}(x)$ имеют одинаковую для всех подынтервалов (2) степень n , наименьшую и достаточную, чтобы выполнялось условие

$$|f(x) - P_{ni}(x)| \leq \varepsilon, \tag{4}$$

где ε – априори задаваемая граница абсолютной погрешности аппроксимации, $i = \overline{1, P}$.

На каждом подынтервале полином (3) преобразуется с приведением подобных к виду

$$P_{ni}(x) = \sum_{j=0}^n a_{fij} x^j, \tag{5}$$

здесь f – индекс, соответствующий аппроксимируемой функции, i – номер подынтервала. При построении полинома (5) учитываются ограничения памяти и временной сложности, сводящиеся к требованиям

$$k \leq k_0, \quad (6)$$

$$n \leq n_0, \quad (7)$$

где k_0 – априори задаваемая верхняя граница для k из (2), n_0 – априори задаваемая верхняя граница для степени полинома n .

Если при некоторых n и k удовлетворено условие (4) на всём множестве подынтервалов из (2), то коэффициенты a_{fij} из (5) могут быть сохранены в памяти компьютера, тогда вычисление полинома (5) по схеме Горнера займёт время

$$t = n (t_y + t_c),$$

где t_y и t_c – время умножения и сложения соответственно. Время дешифрации

номера подынтервала – $i = \left\lfloor \frac{x-a}{h_p} \right\rfloor + 1$ будет иметь оценку

$$t = O(1),$$

здесь $[\alpha]$ – целая часть числа α , а h_p – длина подынтервала (2), при этом нумерация подынтервалов начинается с 1 и совпадает с индексом правой границы. Полученное значение i – адрес строки в массиве коэффициентов a_{fij} ($j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, P}$).

Ставится задача аппроксимации функции (1) полиномом (3) в виде (5) на системе подынтервалов (2) с учётом условий (4), (6), (7) с последующим применением к приближённому вычислению определённых интегралов.

Модифицированная кусочно-полиномиальная схема аппроксимации функций на основе среднего арифметического интерполяционных полиномов Ньютона. Для осуществления описанного подхода [2] в полиномах Ньютона

$$P_{ni}^*(t) = f(x_{i0}) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta^j y_{i0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (t-k), \quad (8)$$

$$\tilde{P}_{ni}(t) = f(x_{in}) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta^j y_{i,n-j}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (q+k), \quad (9)$$

в которых предварительно выполнены замены переменных

$$t = \frac{x - x_{i0}}{h}, \quad (10)$$

$$q = \frac{x - x_{in}}{h}, \quad (11)$$

вводятся обозначения

$$b_{ij}^* = \frac{\Delta_{i0}^j}{j!}, \quad \tilde{b}_{ij} = \frac{\Delta_{i,n-j}^j}{j!},$$

приводящие (8), (9) к виду

$$P_{ni}^*(t) = f(x_{i0}) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^* \prod_{k=0}^{j-1} (t-k), \quad (12)$$

$$\tilde{P}_{ni}(t) = f(x_{in}) + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij} \prod_{k=0}^{j-1} (q+k). \quad (13)$$

Далее вычисляются коэффициенты полиномов

$$R_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1} (t-k) = \sum_{k=0}^j d_{k,j} t^k, \quad (14)$$

$$\tilde{R}_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1} (q+k) = \sum_{k=0}^j \tilde{d}_{k,j} q^k. \quad (15)$$

С этой целью применяется матричная схема [3], которая обладает параллелизмом и инвариантностью шагов алгоритма относительно степени $R_j(t)$ и $\tilde{R}_j(t)$:

$$\begin{pmatrix} d_{jj} \\ d_{j(j-1)} \\ \dots \\ d_{j0} \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{j-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z_{j-k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z_{j-k} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -z_{j-k} \end{pmatrix},$$

здесь $z_k = k$ – корни полиномов (14), (15), $k = 0, j-1$. Так как коэффициенты $d_{k,j}$ и $\tilde{d}_{k,j}$ не зависят от функции (1), то после вычисления по стандартной подпрограмме они могут быть занесены в память компьютера для дальнейшего применения посредством считывания.

С учётом (14), (15) после приведения подобных [2] полиномы (12), (13) принимают вид

$$P_{ni}^*(t) = \sum_{l=1}^n a_{fil}^* t^l, \quad (16)$$

$$\tilde{P}_{ni}(t) = \sum_{l=0}^n \tilde{a}_{fil} q^l, \quad (17)$$

где

$$a_{fi0}^* = f(x_{i0}), \quad a_{fil}^* = \sum_{j=l}^n b_{ij} d_{lj}, \quad \tilde{a}_{fi0} = f(x_{in}), \quad \tilde{a}_{fil} = \sum_{j=l}^n \tilde{b}_{ij} \tilde{d}_{lj},$$

при этом индекс f коэффициентов a_{fil}^* и \tilde{a}_{fil} соответствует аппроксимируемой функции, i – номеру подынтервала (2), $i=1, 2, \dots, 2^k$.

Далее в полиноме (17) совершается переход к переменной t из (10) при помощи соотношения $t-q=n$, и с использованием бинома Ньютона приводятся подобные, после чего (17) принимает вид

$$\tilde{P}_{ni}(t) = \sum_{k=0}^n \tilde{A}_{kif} t^k, \quad (18)$$

$$\tilde{A}_{kif} = \sum_{l=k}^n \tilde{a}_{lkf} (-1)^{l-k} C_k^l n^{l-k}.$$

Учитывая (16), (18), окончательно для полинома (3) будем иметь:

$$P_{ni} = \sum_{k=0}^n B_{kif} t^k, \quad (19)$$

$$B_{kif} = \frac{a_{kif}^* + \tilde{A}_{kif}}{2}. \quad (20)$$

После того как коэффициенты (20) рассчитаны, полином (19) вычисляется в априори заданном числе проверочных точек на каждом подынтервале из (2) по схеме Горнера

$$P_n(t) = (\dots (B_{nif} t + B_{(n-1)if}) t + B_{(n-2)if}) t + \dots + B_{0if}. \quad (21)$$

Если в каждой проверочной точке условие (4) выполнено, то полином (19) с коэффициентами (20) считается полиномом наилучшего приближения в рассматриваемом смысле.

При необходимости вычисления функций из стандартного набора, например при моделировании, коэффициенты (20) могут быть сохранены в памяти компьютера, что позволит значительно снизить временную сложность аппроксимации.

Применение кусочно-полиномиальных схем аппроксимации функций к приближённому вычислению определённых интегралов [1]. Описанный подход со следующими далее деталями может применяться для приближённого вычисления определённых интегралов.

Рассматривается функция (1) на системе подынтервалов (2). Аддитивность интеграла по промежутку, с учётом выполненного условия (4), влечёт

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^P \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{ni}(x) dx. \quad (22)$$

В (22) выполняется переход к переменной t из (10); при $x = x_{i-1}$ получится $t = 0$, при $x = x_i$ соответственно $t = n$, $dx = h dt$, откуда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h \bar{P}_{(n+1)i}(t) \Big|_0^n, \quad (23)$$

где $\bar{P}_{(n+1)i}(t)$ – первообразная $P_{ni}(t)$ из (19): $\bar{P}_{(n+1)i}(t) = \sum_{j=0}^n B_{jif} \frac{t^{j+1}}{j+1}$. Из (22),

(23) следует соотношение

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^P h \bar{P}_{(n+1)i}(n), \quad (24)$$

где $\bar{P}_{(n+1)i}(n)$ будет вычисляться по схеме Горнера:

$$\bar{P}_{(n+1)i}(n) = \left(\dots \left(\left(\frac{B_{nif}}{n+1} n + \frac{B_{(n-1)if}}{n} \right) n + \frac{B_{(n-2)if}}{n-1} \right) n + \dots + \frac{B_{0if}}{1} \right) n. \quad (25)$$

Схема (24), (25) суть компьютерно ориентированная схема приближённого вычисления определённых интегралов.

В отличие от известных квадратурных формул перед вычислением определённого интеграла выполняется аппроксимация подынтегральной функции с наибольшей точностью, за счет этого повышается точность вычисления самого интеграла.

Можно отметить, что вычисление первообразной по схеме (25) от целого аргумента дополнительно снижает погрешность арифметических операций с плавающей точкой, что также увеличивает точность приближенного вычисления интеграла.

Численный эксперимент. Для численного эксперимента применялся ПК на базе процессора Intel Core 2 Quad Q6600 2,4 GHz, 4 GB RAM.

В табл. 1 приводится абсолютная погрешность приближённого вычисления определённых интегралов по модифицированной схеме (δ_{IM}), абсолютная погрешностью формулы Симпсона (δ_{Simp}) и немодифицированной схемы на базе полинома Ньютона для интерполяции вперёд (δ_I). Под абсолютной погрешностью здесь понимается отклонение (24) от табличного значения первообразной.

Из табл. 1 видно, что предложенная модификация позволяет повысить точность аппроксимации определённых интегралов на величину до двух десятичных порядков по сравнению с немодифицированной схемой, и на величину до пяти-шести порядков по сравнению с формулой Симпсона.

Описанный подход позволяет минимизировать абсолютную погрешность аппроксимации определённых интегралов за счёт априори заданной точности аппроксимации подынтегральной функции. Важно отметить, что точность формулы Симпсона можно повысить на 3-4 порядка, выбрав в качестве точек, в которых вычисляются значения функции, узлы интерполяции кусочно-полиномиальной схемы, однако это будет являться её модификацией, поскольку сама по себе формула Симпсона не подразумевает выбора узлов по особому правилу, поэтому в табл. 1 приводятся результаты немодифицированной формулы Симпсона.

Таблица 1

Сравнение точности аппроксимации определённых интегралов при помощи модифицированной и немодифицированной кусочно-полиномиальной схемы

| Интегрируемая функция | Абсолютная погрешность δ_I | Абсолютная погрешность δ_{IM} | Погрешность формулы Симпсона δ_{Simp} |
|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|--|
| $y = \sin(x)$ | 8.1315E-0020 | 0.0000E+0000 | 4.3239E-0014 |
| $y = \frac{1}{1+e^{2x}}$ | 3.0628E-0018 | 2.7105E-0020 | 1.7385E-0014 |
| $y = \frac{x}{1+\sin(x)}$ | 8.1315E-0020 | 5.4211E-0020 | 2.5575E-0014 |
| $y = \frac{1}{(x^2+x+1)^{3/2}}$ | 2.7105E-0019 | 0.0000E+0000 | 2.8925E-0015 |
| $y = \sin^3(x)$ | 1.4094E-0018 | 4.0657E-0020 | 6.9065E-0014 |

Отметим, что использование вместо полинома (3) интерполяционных полиномов с центральными разностями и интерполяционных схем, построенных на ортогональных полиномах, не позволяет улучшить результаты, представленные в табл. 1. Был проведён эксперимент со схемами на базе полиномов Гаусса, Стирлинга [4], Стеффенсена [5], Чебышева [4] и Лежандра. При этом абсолютная погрешность аппроксимации функций и определённых интегралов оказалась больше абсолютных погрешностей, приведенных в табл. 1, на 11-12 десятичных порядков.

Подробное описание схем и численных экспериментов приводятся в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Таганрог: Изд-во ГТИ ЮФУ, 2008.
2. *Ромм Я.Е., Голиков А.Н.* Распараллеливаемые кусочно-полиномиальные схемы аппроксимации функций, производных и вычисления определённых интегралов с повышенной точностью / ТГПИ. – Таганрог, 2010. – 139 с. Деп. в ВИНТИ 27.04.2010, № 230-B2010.
3. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. – Киев, 2007. – № 2. – С. 161-174.
4. *Березин И.С., Жидков Н.Г.* Методы вычислений. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 464 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 832 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Ромм Яков Евсеевич

Таганрогский государственный педагогический институт.

E-mail: romm@List.ru.

347926, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48.

Тел: 8634601899.

Кафедра информатики; заведующий кафедрой; д.т.н.; профессор.

Голиков Александр Николаевич

E-mail: golicov89@mail.ru.

Тел.: +79286013241.

Студент.

Romm Yakov Evseevich

Taganrog State Pedagogical Institute.

E-mail: romm@List.ru.

48, Initsiativnaya Street, Taganrog, 347926, Russia.

Phone: +7634601899.

The Department of Information; Head the Department; Dr. of Eng. Sc.; Professor.

Golikov Aleksandr Nikolaevich

E-mail: golicov89@mail.ru.

Phone: +79286013241.

Student.