Раздел III. Алгоритмическое и аппаратное обеспечение

УДК 681.3.06:681.323(519.6)

Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Кусочно-полиномиальная аппроксимация решения дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных строится на основе интерполяционного полинома Ньютона. На текущей подобласти по сеточным приближениям интерполируются все частные производные ДУ, вычисляются коэффициенты интерполяционных полиномов, решение приближается с помощью повторного интеграла. Процесс итеративно повторяется до минимизации погрешности приближения второй производной. Компьютерная реализация отличается высокой точностью приближения решения при малой временной сложности.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация; интерполяционный полином Ньютона; дифференциальные уравнения в частных производных.

YA.E. Romm, G.A. Dzhanunts

PIECEWISE-POLYNOMIAL SOLUTIONS OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Piecewise-polynomial approximation of the partial differential equations (DE) is based on Newton's interpolation polynomial. At the current subdomain on grid approximations all partial DE derivatives are interpolated, coefficients of the interpolation polynomial are calculated, the solution is approached with iterated integral. The process is repeated iteratively until the approximation error of the second derivative is minimized. Computer realization has highly accurate approximation of the solution at a low time complexity.

Piecewise-polynomial approximation; Newton's interpolation polynomial; partial differential equations.

Постановка вопроса. Известные численные методы решения различных дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных позволяют получить таблицу приближенных значений искомого решения в некоторых точках рассматриваемой области. Однако проблема приближения решения ДУ в частных производных сохраняется при ограничениях на точность и при требовании аналитичности полученного приближения [1]. Ниже рассматривается вопрос о построении разностно-полиномиального приближения решения задачи Коши для ДУ в частных производных на основе метода сеток при помощи кусочно-полиномиальной интерполяции разностных значений в ограничениях общего вида. Методология построения схемы опирается на подход, представленный в [2].

Описание исходного метода кусочно-полиномиальной интерполяции. Непосредственно ниже описывается исходный для излагаемого подхода метод кусочно-полиномиальной аппроксимации функций на основе интерполяционного полинома Ньютона от одной и от двух переменных [3, 4].

Аппроксимация действительной функции $y = y(x)$ от одной действительной переменной на произвольно фиксированном замкнутом промежутке $[\alpha, \beta]$ выполняется следующим образом. Выбирается система подынтервалов равной длины, объединение которых покрывает $[\alpha, \beta]$, причем так, чтобы имело место соотношение

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}], \tag{1}$$

где $P = 2^k$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Длина подынтервалов обозначается $\rho = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, P-1}$. Для каждого отдельно взятого подынтервала из (1) с номером i строится интерполяционный полином Ньютона $\Psi_{in}(z)$ с равноотстоящими узлами, где $z = \dfrac{x - x_i}{h}$, n выбирается минимальным при условии, что абсолютная погрешность не превышает априори заданного ε одновременно на всех подынтервалах:

$$\left| y(x) - \Psi_{in}(z) \right| \le \varepsilon, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \; i = \overline{0, P-1}.$$

При этом полином Ньютона в общем случае преобразуется к виду полинома с явными значениями числовых коэффициентов – на i-м подынтервале аппроксимирующий полином принимает вид

$$P_{in}(x) = a_{i0} + a_{i1} x + a_{i2} x^2 + \ldots + a_{in} x^n. \tag{2}$$

Преобразование к виду (2) выполняется следующим образом. Рассматриваемый полином Ньютона с шагом интерполяции $h = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{n}$ между узлами $x_{ij} = x_i + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$ записывается в виде

$$\Psi_{in}(z) = y(x_{i0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j y_{i0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (z - k), \quad z = \frac{x - x_{i0}}{h}, \tag{3}$$

где $\Delta^j y_{i0}$ – конечная разность j-го порядка в точке x_{i0}. Предварительно вычисляются конечные разности $\Delta y_{i0} = y(x_{i1}) - y(x_{i0})$, $\Delta^k y_{i0} = \Delta^{k-1} y_{i1} - \Delta^{k-1} y_{i0}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, значения которых обозначаются $b_{ij} = \Delta^j y_{i0}$. Каждое произведение $P_j(z) = \prod_{k=0}^{j-1} (z - k)$ является полиномом, заданным разложением на множители, где $k = \overline{0, j-1}$ его нули, по которым можно восстановить коэффициенты: $P_j(z) = d_{j0} + d_{j1} z + d_{j2} z^2 + \ldots + d_{jj} z^j$. Ниже используются обозначения $S_\ell = \ell$, $\ell = \overline{0, j-1}$. Применяется отличное от формулы Виета соотношение

$$\begin{pmatrix} d_{jj} \\ d_{j(j-1)} \\ \dots \\ d_{j0} \end{pmatrix} = \prod_{\ell=1}^{j} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -S_{j-\ell} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -S_{j-\ell} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -S_{j-\ell} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -S_{j-\ell} \end{matrix}}_{j-\ell+1} \right). \tag{4}$$

Доказательство (4), инвариантный относительно номера коэффициента алгоритм вычисления и программная реализация приводятся в [5]. Предполагается, что для всех требуемых индексов j априори вычислены значения $d_{j\ell} / j!$, $\ell = \overline{0, j}$, которые сохраняются в памяти. Полином (3) переводится в (2) приведением подобных с заменой переменной:

$$\Psi_{in}(z) = a_{i0} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} z^{\ell}, \tag{5}$$

где

$$a_{i0} = y(x_{i0}), \qquad a_{i\ell} = \sum_{j=\ell}^{n} \frac{b_{ij} d_{j\ell}}{j!}. \tag{6}$$

Для аппроксимации заранее известной или часто используемой (например, при моделировании) функции с целью минимизации времени ее вычисления достаточно рассчитать коэффициенты $a_{i\ell}$, $\ell = \overline{0, n}$ и сделать их для данной функции хранимыми в памяти компьютера. При расчете значения функции в требуемой точке x происходит дешифрация значения номера подынтервала по формуле $i = int\left(\frac{x-\alpha}{\rho}\right)$, который является прямым адресом считывания соответственных подынтервалу коэффициентов. Время вычисления функции рассматриваемого вида сокращается до значения $O(1)$ в случае малых $n = const$.

Метод дает возможность фактически в общих условиях достигать точности вычисления функций, которая характеризуется границей абсолютной погрешности 10^{-20} [3]. Табличную производную и первообразную полинома (5) можно использовать для аппроксимации производной и определенного интеграла от функции

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_{i\ell} z^{\ell-1}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} y(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_{i\ell} n^{\ell+1}}{\ell+1}, \tag{7}$$

где $a_{i\ell}$ из (6).

Целесообразность применения (7) с целью повышения точности численного дифференцирования и интегрирования подтверждает численный эксперимент, приведенный в [3]. Описанный метод с определенными видоизменениями [2] используется для приближения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Ниже строится аппроксимация функции двух переменных по аналогии с изложенной аппроксимацией функции одной переменной.

Пусть действительная функция $u = u(x, t)$ от двух действительных переменных задана в замкнутой области $G = \{(x, t) \mid x \in [a,b], t \in [c,d]\}$. Эта область разбивается на подобласти G_κ, такие что

$$G = \bigcup_{\kappa=1}^{P_x P_t} G_\kappa , \tag{8}$$

где $P_x = 2^{k_x}$, $P_t = 2^{k_t}$, $k_x, k_t \in N$, $G_\kappa = \{(x, t) \mid x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [t_j, t_{j+1}]\}$, при $i = \overline{0, P_x - 1}$, $j = \overline{0, P_t - 1}$. Номер κ подобласти определяется при помощи равенств $\kappa = jP_x + i + 1,\ i = int\left(\dfrac{x-a}{h_x}\right) + 1,\ j = int\left(\dfrac{t-c}{h_t}\right) + 1$, где $h_x = \dfrac{a-b}{P_x}$, $h_t = \dfrac{c-d}{P_t}$, int – целая часть числа.

Пусть в подобласти G_κ из (8) задана система узлов вида

$$\tilde{G}_\kappa = \left\{(x_{i\ell}, t_{jm}) \middle| x_{i\ell} = x_i + \ell h, t_{jm} = t_j + mg,\ \ell = \overline{0,n},\ m = \overline{0, n-\ell}\right\}, \tag{9}$$

где $h = \dfrac{h_x}{n}$, $g = \dfrac{h_t}{n}$ – шаги интерполяции. В каждой подобласти G_κ из (8) между узлами (9) строится интерполяционный полином Ньютона от двух действительных переменных степени n, который по схеме, аналогичной (3)–(6), принимает вид

$$P_{\kappa n}(x, t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{\kappa ij} z^i w^j , \tag{10}$$

где $z = \dfrac{x - x_0}{h}$, $w = \dfrac{t - t_0}{g}$, n выбирается минимальной при условии, что абсолютная погрешность не превышает априори заданной границы ε одновременно на всех подобластях $\kappa = \overline{1, P_x P_t}$: $\left| P_{\kappa n}(x, t) - u(x, t) \right| \le \varepsilon$.

С применением табличных преобразований полином (10) может быть использован для аппроксимации частных производных и двойных интегралов [4].

Кусочно-полиномиальное приближение решения ДУ гиперболического типа с использованием метода сеток. Пусть для простоты рассматривается первая краевая задача для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial t} + gu = f, \tag{11}$$

где a, b, c, d, g, f – заданные функции переменных x и t и $ab > 0$. Требуется отыскать решение $u(x, t)$ уравнения (11) в области $G\ \{\alpha \le x \le \beta,\ t \ge 0\}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad \alpha \le x \le \beta \tag{12}$$

и краевым условиям

$$u\big|_{x=\alpha} = \Phi(t),\ u\big|_{x=\beta} = \Psi(t), \tag{13}$$

где φ и ψ – заданные функции переменного x, Φ и Ψ – заданные функции переменного t. Проводится два семейства параллельных прямых $x = \alpha + i\,h_x\,n,\ t = j\,h_t\,n,\quad i, j = 0,1,2,...$, которые покрывают область G сеткой прямоугольников со сторонами $h_x\,n$ и $h_t\,n$ по осям x и t соответственно, n – степень конструируемого интерполяционного полинома, h_x, h_t – шаги метода сеток. С целью избежать несущественных оговорок производится замена области G на область $T\,\{\alpha \le x \le \beta,\ 0 \le t \le \gamma\}$, которая разбивается на подобласти $T = \bigcup\limits_{\tau=1}^{R_x R_t} T_\tau$,

где $R_x = int\left(\dfrac{\beta-\alpha}{h_x\,n}\right)$, $R_t = int\left(\dfrac{\gamma}{h_t\,n}\right)$, $T_\tau = \left\{(x,\,t)\,\middle|\, x \in [x_i, x_{i+1}], t \in \left[t_j, t_{j+1}\right]\right\}$, при $j = \overline{0, R_t - 1}$.

Приближенное решение задачи (11)–(13) на области T сводится к последовательному ее решению на подобластях T_τ, при этом для подобласти с номером $\tau + 1$ правые части равенств в условиях (12)–(13) приближенно известны из решения задачи на подобласти с номером τ.

Аналогично (9) на подобласти T_τ строится система узлов

$$\widetilde{T}_\tau = \left\{\left(x_{i\ell}, t_{jm}\right)\middle| x_{i\ell} = x_i + \ell h_x, t_{jm} = t_j + m\,h_t,\ \ell = \overline{0,n},\ m = \overline{0, n-\ell}\right\}. \tag{14}$$

В каждом из узлов (14) методом сеток вычисляются приближенные значения решения $u(\,x_{i\ell},\,t_{jm}\,)$, $\ell = \overline{0,n}$, $m = \overline{0, n-\ell}$, по которым строится интерполяционный полином Ньютона степени n относительно независимых переменных x и t. Построенный полином приводится к виду (10)

$$P_{\tau n}(x,\,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{\tau ij}\, z^i\, w^j\ , \tag{15}$$

где $z = \dfrac{x - x_0}{h_x}$, $w = \dfrac{t - t_0}{h_t}$. Полином (15) интерполирует искомое решение на всей подобласти T_τ, но для уточнения приближения применяется следующая схема. На основе (15) с помощью табличных преобразований выполняется полиномиальное приближение всех частных производных из (11):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx P^{x}_{\tau(n-1)}(x,\,t) = \frac{1}{h_x}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}(i+1)a_{\tau(i+1)j}\, z^i\, w^j\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx P^{xx}_{\tau(n-2)}(x,\,t) = \frac{1}{h_x^2}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-i-2}(i+1)(i+2)a_{\tau(i+2)j}\, z^i\, w^j\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx P^{t}_{\tau(n-1)}(x,\,t) = \frac{1}{h_t}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}(j+1)a_{\tau i(j+1)}\, z^i\, w^j\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx P^{tt}_{\tau(n-2)}(x,\,t) = \frac{1}{h_t^2}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-i-2}(j+1)(j+2)a_{\tau\, i(j+2)}\, z^i\, w^j\ .$$

На этой основе и из (11) во всех узлах (14) вычисляются значения:

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \approx \frac{\dot{a}\dot{P}^{xx}_{\tau(n-2)} + \dot{c}\,\dot{P}^{x}_{\tau(n-1)} + \dot{d}\,\dot{P}^{t}_{\tau(n-1)} + \dot{g}\,\dot{P}_{\tau n} - \dot{f}}{\dot{b}},$$

где $\dot{y} = y\left(x_{i\ell},\, t_{jm}\right)$. Значения $\dfrac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2}$ рассматриваются как значения в узлах интерполяции

$$\mu^{i\ell}_{jm} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2},\ \ \ell = \overline{0,n},\ m = \overline{0,n-\ell}. \tag{16}$$

По условиям (16) строится интерполяционный полином Ньютона $(n-2)$-й степени, который приводится к виду полинома с числовыми коэффициентами:

$$R^{tt}_{\tau(n-2)}(x,\, t) = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-i-2} c_{\tau\, i\, j}\, z^i\, w^j\,. \tag{17}$$

Построенный полином (17) аппроксимирует вторую производную по переменной t. На практике абсолютная погрешность такого приближения оказывается точнее аппроксимации непосредственно полиномом $P^{tt}_{\tau(n-2)}(x,\, t)$. Приближение решения строится как повторный интеграл от (17), при этом постоянные для подобласти соответствующей индексам $(i,\, j)$ известны из приближения на подобласти с индексами $(i,\, j-1)$, для $j = 0$ постоянные известны из (12).

Построенный полином

$$\begin{aligned} R_{\tau n}(x,\, t) &= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} R^{tt}_{\tau(n-2)}\, dt^2 = \\ &= u(x,t_0) + u_t(x,t_0)\,t + h_t^2\, w^2 \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{c_{\tau\, i\, j}}{(j+1)(j+2)}\, z^i\, w^j \end{aligned} \tag{18}$$

принимается за приближение $u(x,t) \approx R_{\tau n}(x,t),\ \ x,\, t \in T_\tau$. Аналогичное приближение строится на подобласти $T_{\tau+1}$ и т. д., до исчерпания области *T*.

Приближение решения существенно уточняется путем неоднократного решения задачи на подобласти, где узловые значения в (15) вычисляются не методом сеток, а с помощью построенного на текущей подобласти полиномиального приближения (18), полученного на предыдущей итерации. Дополнительная точность достигается программной оптимизацией степени интерполяционного полинома и шага метода сеток. Отличительной чертой предложенной схемы является ее применимость также для нелинейных дифференциальных уравнений различного вида.

Численный эксперимент. Все варианты метода реализованы в стандартном блоке среды *Delphi* на ПК *Pentium D*. На вход программы поступают функции $a,\, b,\, c,\, d,\, g,\, f$ из (11), условия (12), (13), область решения и шаг метода сеток. При решении шаг интегрирования последовательно уменьшается в 10 раз, пока дальнейшее уменьшение не ухудшит точности. В данном пункте использовано значение степени $n = 5$, которое оптимально по точности приближения. Ниже приводятся характерные результаты численного эксперимента.

Пример 1. Требуется приближенно решить краевую задачу для уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\,sin(x + 2t), \\ &u(x,0) = sin(x),\ \ u_t(x,0) = 2\,cos(x), \\ &u(0,t) = sin(2t),\ \ u(1,t) = sin(2t+1), \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

на области $T\ \{0 \le x \le 1,\ \ 0 \le t \le 0.1\}$. Точное решение $u(x,\,t) = sin(x + 2t)$ используется для вывода погрешности приближения.

Таблица 1

Абсолютная погрешность приближения решения задачи (19)

(x,t)	Метод сеток	Полиномиальное уточнение
	$h = 2*10^{-5}$	$h = 2*10^{-4}$
(0.8994, 0.0004)	1.25E-**0008**	5.42E-**0020**
(0.7994, 0.0044)	1.26E-**0007**	9.20E-**0016**
…	…	…
(0.7994, 0.0788)	2.26E**-0006**	5.14E**-0010**
(0.7994, 0.0996)	2.85E**-0006**	2.49E**-0009**

Представленные в табл. 1 абсолютные погрешности решения задачи (19) непосредственно методом сеток и его полиномиальным уточнением показывают повышение точности приближения на 3-12 десятичных порядков в зависимости от значения переменной *t*. Помимо высокой точности аппроксимации решения схема отличается непрерывностью полученного приближения на всей области *T* за счет кусочно-полиномиальной интерполяции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Березин И.С.*, *Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т.2. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
2. *Ромм Я.Е.*, *Джанунц Г.А.* Кусочно-полиномиальная аппроксимация решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования интерполяционного полинома Ньютона. – Таганрог: ТГПИ, 2010. – 37 с. Деп. в ВИНИТИ 25.05.2010, № 305-В2010.
3. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций. Автореф. дисс. … канд. тех. наук. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. – 2008.
4. *Голиков А.Н.* Кусочно-полиномиальные схемы вычисления функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов на основе интерполяционного полинома Ньютона. – Таганрог: ТГПИ, 2010. – 150 с. Деп в ВИНИТИ 20.09.2010, № 528-В2010.
5. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки // II Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 161-174.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Л.П. Фельдман.

Ромм Яков Евсеевич
Таганрогский государственный педагогический институт.
E-mail: romm@List.ru.
347926, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48.
Тел.: 88634601753, 88634601812, 88634601807.

Джанунц Гарик Апетович
E-mail: janunts@inbox.ru.
Тел.: +79185069024.

Romm Yakov Evseevich
Taganrog State Pedagogical Institute.
E-mail: romm@List.ru.
48, Initsiativnaya Street, Taganrog, 347926, Russia.
Phone: 88634601753, 88634601812, 88634601807.

Dzhanunts Garik Apetovich
E-mail: janunts@inbox.ru.
Phone: +79185069024.

УДК 681.142

В.А. Балыбердин, А.М. Белевцев, М.А. Дружинин

ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Рассматриваются вопросы использования генетических алгоритмов оптимизации для рациональной организации информационно-вычислительных процессов в системах специального назначения с сетецентрическим управлением. Последние рассматриваются как большие информационные системы с распределённой обработкой данных (СРОД). Показано, что для обеспечения высоких требований устойчивости и оперативности управления, характерных для некоторых специальных систем, необходимо проведение оптимизации функционирования таких систем. Для поиска оптимальных решений соответствующих оптимизационных задач предлагается использование генетических алгоритмов.

Генетические алгоритмы оптимизации; распределённая обработка; сетецентрические системы.

V.A. Baliberdin, A.M. Belevtsev, M.A. Drujinin

GENERIC ALGORITHMS AND SPESIAL CETECENTRIC CONTROL SYSTEMS OPTIMIZATION

Some problems of genetic optimization algorithms using to organize special cetecentric control systems are discussed. These systems are treated as to be distributed data systems. Their high performances may be reached by means of the system optimization. To obtain the optimal solution the genetic optimization algorithms are proposed.

Genetic optimization algorithms; distributed processing; cetecentric systems.

В последние годы всё более пристальное внимание исследователей и разработчиков больших информационно-управляющих систем привлекает идея сетецентрического управления. Сетецентрические методы и технологии, в той или иной степени, реализуются в системах государственного управления отдельных стран, в крупном бизнесе, а также в системах военного назначения некоторых стран мира, хотя и в ограниченных масштабах. Однако среди специалистов до сих пор нет единого и четкого понимания многих аспектов, связанных с практической реализацией концепции сетецентрического управления. Некоторые авторы полагают, что достаточно объединить источники информации, блоки управления и исполнительные органы хорошими каналами связи и синергический эффект, присущий сетецентрическим системам, обеспечен.

Вместе с тем более подробный анализ показывает, что для успешного внедрения сетецентрических систем необходимо оценивать возможные варианты организации информационно-вычислительных процессов в таких системах и опреде-