3. *Лихачев В.Я.* Техническая диагностика пневмогидравлических систем ЖРД. – М.: Машиностроение, 1983. – 204 с.
4. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999. – 208 с
5. *Новиков Л.В.* Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов // Научное приборостроение. – 2000. – Т. 10, № 3. – С. 57-64.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.В. Тютиков.

Байдаров Сергей Юрьевич
Федеральное государственное УП ФНПЦ «ПО «Старт» им. М.В. Проценко».
E-mail: info@startatom.ru.
442960, Пензенская обл., г. Заречный, проспект Мира, д. 1.
Тел.: 88412582755; факс: 88412651758.

Baydarov Sergey Urievich
Federal State Unitary Enterprise Federal Research and Production Center Production Complex Start named after M.V. Protsenko.
E-mail: info@startatom.ru.
1, Mira Prospekt, Zarechny, Penza Region, 442960, Russia.
Phone: +78412582755; Fax: +78412651758.

УДК 681.3.06:681.323(519.6)

А.Н. Голиков

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ[*]

Излагается кусочно-полиномиальная схема аппроксимации действительных функций двух действительных переменных на основе интерполяционных полиномов Ньютона от двух переменных. Исходная прямоугольная область определения функции дробится на треугольные подобласти. На каждой подобласти строится соответствующий полином Ньютона степени минимальной для данного числа подобластей. Аппроксимирующий полином приводится к каноническому виду, после чего применяется для приближённого вычисления частных производных и двойных интегралов по прямоугольной области.

Кусочно-полиномиальная схема; интерполяция по Ньютону; аппроксимация частных производных; приближенное вычисление определённых интегралов.

A.N. Golikov

PIECEWISE-POLYNOMIAL APPROXIMATION FUNCTIONS OF TWO VARIABLES, PARTIAL DERIVATIVES AND DOUBLE INTEGRALS

Presents a piecewise polynomial approximation scheme of real functions of two real variables, based on Newton's interpolating polynomials of two variables. The original rectangular domain of the function is split into triangular sub-domains. On each sub-domain is constructed corresponding Newton polynomial of degree minimum for a given number of sub-domains. Approximating polynomial is to the canonical form, and then applies for an approximate calculation of partial derivatives and double integrals over a rectangular area.

Piecewise-polynomial scheme; according to Newton interpolation; approximation of partial; approximate calculation of definite integrals.

[*] Работа поддержана РФФИ, грант по проекту № 10-07-00178а за 2010 год.

Введение и постановка задачи. В статье излагается кусочно-полиномиальная схема вычисления действительных функций двух действительных переменных на основе интерполяционного полинома Ньютона с последующим применением для аппроксимации частных производных и двойных интегралов по прямоугольной области [1]. Схема является компьютерно-ориентированной и методологически опирается на подход, представленный в [2–4] для случая действительных функций одной действительной переменной.

Рассматривается функция

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

такая, что $(x, y, z) \in R^3$, $(x, y) \in G \subseteq R^2$, $G = \{(x, y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ – область определения. Область G разбивается на подобласти,

$$G = \bigcup_{\tilde{k}=1}^{P_x P_y} G_{\tilde{k}}, \tag{2}$$

где $P_x = 2^{k_x}$, $P_y = 2^{k_y}$, $k_x \in N$, $k_y \in N$,

$$G_{\tilde{k}} = \{(x,y) \mid x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\}, \text{ при } i = \overline{1, P_x - 1},\ j = \overline{1, P_y - 1},$$

$$G_{\tilde{k}} = \{(x,y) \mid x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j)\}, \text{ при } i = P_x,\ j = \overline{1, P_y - 1},$$

$$G_{\tilde{k}} = \{(x,y) \mid x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j]\}, \text{ при } i = \overline{1, P_x - 1},\ j = P_y.$$

Каждая подобласть $G_{\tilde{k}}$ из (2) разбивается диагональю, задаваемой уравнением вида

$$(\ell):\ y(x) = -\frac{h_y}{h_x} x - \frac{h_y}{h_x} y_i + x_{i-1}, \tag{3}$$

ещё на две подобласти $G_{\tilde{k}}^d$ и $G_{\tilde{k}}^u$ такие, что

$$G_{\tilde{k}} = G_{\tilde{k}}^d \cup G_{\tilde{k}}^u, \tag{4}$$

где

$$G_{\tilde{k}}^d = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x < x_i, y_{j-1} \le y < y(x)\},\ G_{\tilde{k}}^u = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x < x_i, y(x) \le y < y_j\},$$

при $i = \overline{1, P_x - 1}$, $j = \overline{1, P_y - 1}$,

$$G_{\tilde{k}}^d = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y < y(x)\},\ G_{\tilde{k}}^u = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y(x) \le y < y_j\},$$

при $i = P_x$, $j = \overline{1, P_y - 1}$,

$$G_{\tilde{k}}^d = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x < x_i, y_{j-1} \le y < y(x)\},\ G_{\tilde{k}}^u = \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x < x_i, y(x) \le y \le y_j\},$$

при $i = \overline{1, P_x - 1}$, $j = P_y$, $P_x = 2^{k_x}$, $P_y = 2^{k_y}$, $k_x \in N$, $k_y \in N$, $y(x)$ из (3). Дешифрация подобласти (4) выполняется при помощи соотношений

$$\begin{cases} \tilde{k} = jP_x + i + 1,\ i = \left[\dfrac{x-a}{h_x}\right] + 1,\ j = \left[\dfrac{y-c}{h_y}\right] + 1, \\ (x, y) \in G_{\tilde{k}}^d, \text{ при } u < N - t,\ (x, y) \in G_{\tilde{k}}^u, \text{ при } u \ge N - t, \end{cases} \tag{5}$$

где $h_x = \dfrac{a-b}{P_x}$, $h_y = \dfrac{c-d}{P_y}$, $[Y]$ – целая часть числа Y.

В каждой подобласти (4) строится интерполяционный полином Ньютона двух действительных переменных, который после приведения подобных имеет вид

$$P_{\tilde{k},N}(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}a_{\tilde{k},ij}\,x^i y^j\,, \tag{6}$$

при этом требуется, чтобы выполнялось условие:

$$\left|P_{\tilde{k},N}(x,y)-f(x,y)\right|\le\varepsilon\,, \tag{7}$$

где ε – априори задаваемая граница абсолютной погрешности аппроксимации, $f(x,y)$ из (1), $\tilde{k}=\overline{1,P_xP_y}$.

Временная сложность вычисления полинома (6) по схеме Горнера для полиномов двух переменных имеет оценку $t(1)=N^2\left(t_y+t_c\right)$, где t_y, t_c – время одного умножения и сложения соответственно.

Излагаемый подход учитывает ограничения памяти и временной сложности при помощи условий вида

$$k_x\le K_x,\ k_y\le K_y, \tag{8}$$

$$N\le\tilde{N}\,, \tag{9}$$

где K_x, K_y, $\tilde{N}$ – задаются априори из условий конкретной прикладной задачи.

При реализации описываемого построения вычисление коэффициентов полинома (6) начинается со значений $N=1$, $k_x=0$, $k_y=0$. Если при этих значениях условие (7) выполняется на всех подобластях (4), то работа алгоритма прекращается и найденные при этом коэффициенты считаются коэффициентами $a_{\tilde{k},ij}$. В противном случае значение N увеличивается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, либо пока не будет достигнут предел $\tilde{N}$. После этого пересчёт производится для значений $N=1$, $k_x=1$, $k_y=1$, и т.д.

Верификация точности выполняется в проверочных точках, не совпадающих с узлами интерполяции и расположенных с равным шагом вдоль координатных осей. Число проверочных точек задаётся априори.

Если найдена комбинация N, P_x, P_y, такая, что на каждой подобласти (4) выполняется условие (7), то полученные при этом коэффициенты полинома (6) считаются искомыми и заносятся в память компьютера. В дальнейшем для извлечения коэффициентов из памяти необходимо будет выполнить дешифрацию (5).

Степень N по построению минимальна для данных P_x, P_y, этим достигается снижение временной сложности аппроксимации.

Кусочно-интерполяционный полином (6) применяется для аппроксимации частных производных и двойных интегралов по прямоугольной области.

Ниже ставится задача построения на изложенной основе распараллеливаемой схемы аппроксимации функции (1) в системе подобластей (2), (4) с последующим применением для приближённого вычисления частных производных и двойных интегралов.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация действительных функций двух действительных переменных на основе интерполяционных полиномов Ньютона. Пусть в рамках излагаемого подхода задана система подобластей (2), (4).

На каждой подобласти $G^u_{\tilde{k}}$ задаётся система узлов интерполяции вида

$$\tilde{G}^u_{\tilde{k}}=\left\{\left(x_{i,\ell},y_{j,m}\right)\middle|\,x_{i,\ell}=x_i-\ell h,\ y_{j,m}=y_j-mg,\ \ell=\overline{0,N},m=\overline{0,N-\ell}\right\}, \tag{10}$$

где $h=\dfrac{h_x}{N}$, $g=\dfrac{h_y}{N}$, а i, j, $\tilde{k}$, h_x, h_y из (3). На узлах (10) строится полином Ньютона для интерполяции назад и вниз

$$P^{u}_{\tilde{k},N}(x,y)=f(x_{i0},y_{j0})+\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^{m}_{x^k y^{m-k}}f(x_{i0},y_{j0})}{k!h^k(m-k)!g^{m-k}}\prod_{i'=0}^{k}(x-x_{i'})\prod_{j'=0}^{m-k}(y-y_{j'}). \quad (11)$$

Аналогично на подобластях $G^{d}_{\tilde{k}}$ задаются узлы

$$\tilde{G}^{d}_{\tilde{k}}=\left\{(x_{i-1,\ell},y_{j-1,m})\middle|\, x_{i-1,\ell}=x_{i-1}+\ell h,\ y_{j-1,m}=y_{j-1}+mg,\ \ell=\overline{0,N}, m=\overline{0,N-\ell}\right\}, \quad (12)$$

в которых строится полином Ньютона для интерполяции вперёд и вверх

$$P^{d}_{\tilde{k},N}(x,y)=f(x_{i-1,0},y_{j-1,0})+\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^{m}f_{x^k y^{m-k}}(x_{i-1,0},y_{j-1,0})}{k!h^k(m-k)!g^{m-k}}\prod_{i'=0}^{k}(x-x_{i'})\prod_{j'=0}^{m-k}(y-y_{j'}). \quad (13)$$

Так как узлы (10), (12) нумеруются по удалению от начального узла интерполяции и для обоих полиномов имеют одинаковые индексы, то запись полиномов (12), (13) и дальнейшие их преобразования формально совпадают.

Вводится обозначение

$$P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}b^{(*)}_{mk}\prod_{i=0}^{k}(t-i)\prod_{j=0}^{m-k}(u-j), \quad (14)$$

где

$$P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u)=\begin{cases}P^{d}_{\tilde{k},N}(t,u), & \text{при } u<N-t,\\ P^{u}_{\tilde{k},N}(t,u), & \text{при } u\ge N-t,\end{cases} \qquad b^{(*)}_{mk}=\begin{cases}\dfrac{\Delta^{m}_{x^k y^{m-k}}f(x_{i0},y_{j0})}{k!(m-k)!}, & \text{для } (x,y)\in G^{u}_{\tilde{k}},\\ \dfrac{\Delta^{m}f_{x^k y^{m-k}}(x_{i-1,0},y_{j-1,0})}{k!(m-k)!}, & \text{для } (x,y)\in G^{d}_{\tilde{k}},\end{cases}$$

$$t=\begin{cases}\dfrac{x_{i,0}-x}{h}, & \text{для } (x,y)\in G^{u}_{\tilde{k}},\\ \dfrac{x-x_{i-1,0}}{h}, & \text{для } (x,y)\in G^{d}_{\tilde{k}},\end{cases} \qquad u=\begin{cases}\dfrac{y-y_{i-1,0}}{g}, & \text{для } (x,y)\in G^{u}_{\tilde{k}},\\ \dfrac{y_{i,0}-y}{h}, & \text{для } (x,y)\in G^{d}_{\tilde{k}}.\end{cases} \quad (15)$$

Для приведения полинома (14) к виду (6) при помощи матричной схемы вычисления коэффициентов полинома по его корням [5] вычисляются коэффициенты полиномов $R_k(t)=\prod_{i=0}^{k}(t-i)=\sum_{i=0}^{k}d_{k,i}t^i$, $Q_{m-k}(u)=\prod_{j=0}^{m-k}(u-j)=\sum_{j=0}^{m-k}\tilde{d}_{m-k,j}u^j$.

Так как $R_k(t)$, $Q_{m-k}(u)$ не зависят от вида функции (1), то после однократного вычисления коэффициенты $d_{k,i}$, $\tilde{d}_{m-k,j}$ могут быть занесены в память компьютера для последующего считывания при необходимости.

После вычисления коэффициентов получим

$$\prod_{i=0}^{k}(t-i)\prod_{j=0}^{m-k}(u-j)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k}d_{k,i}\tilde{d}_{m-k,j}t^iu^j=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k}D_{m,k,i,j}\,t^iu^j , \quad (16)$$

где $D_{m,k,i,j}=d_{k,i}\tilde{d}_{m-k,j}$.

С учётом (16) раскрытие скобок и приведение подобных в равенстве (14) повлечёт

$$P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}a^{(*)}_{\tilde{k},ij}\,t^iu^j , \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} a^{(*)}_{\tilde{k},i'j'} = a^{d}_{\tilde{k},i'j'}, \text{ для } (x,y)\in G^{d}_{\tilde{k}},\ a^{(*)}_{\tilde{k},i'j'} = a^{u}_{\tilde{k},i'j'}, \text{ для } (x,y)\in G^{u}_{\tilde{k}}, \\ a^{d}_{\tilde{k},00} = f\left(x_{i,0}, y_{j,0}\right) + \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} b^{d}_{mk} D_{m,k,0,0}, a^{u}_{\tilde{k},00} = f\left(x_{i-1,0}, y_{j-1,0}\right) + \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} b^{u}_{mk} D_{m,k,0,0}, \\ a^{(*)}_{\tilde{k},i'j'} = \sum_{m=j'}^{N}\sum_{k=i'}^{m-j'} b^{(*)}_{mk} D_{m,k,i',j'}, \text{ при } i' = \overline{1,N},\ j' = \overline{1,N-i}, \end{cases} \tag{18}$$

где $b^{(*)}_{mk}$ из (14), $D_{m,k,i',j'}$ из (16).

После вычисления коэффициентов (19) в априори заданных проверочных точках, расположенных с равным шагом вдоль координатных осей и не совпадающих с узлами интерполяции, проверяется условие (7). Если во всех проверочных точках неравенство (7) выполняется, то искомый аппроксимирующий полином считается построенным, иначе построение выполняется по описанной выше схеме для другого сочетания N, P_x, P_y, пока не будет достигнута требуемая точность в пределах (8), (9).

Представленная схема является компьютерно-ориентированной для приближённого вычисления функций, в частности, из стандартной библиотеки. В этом случае достаточно занести коэффициенты (18) в память компьютера, и в дальнейшем аппроксимация функции (1) полиномом (17) сведётся к вычислению выражения (17) по схеме Горнера с предварительной дешифрацией (5), определяющей используемый массив коэффициентов – $a^{d}_{\tilde{k},i'j'}$ или $a^{u}_{\tilde{k},i'j'}$.

Таким образом, изложен подход к кусочно-полиномиальной аппроксимации функции (1) на основе интерполяционных полиномов Ньютона двух переменных. Ниже показано применение подхода для кусочно-полиномиальной аппроксимации частных производных.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация частных производных от функции двух переменных. Пусть полином (18) построен и выполняется приближённое равенство

$$f(x,y) \approx P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u). \tag{19}$$

Продифференцировав (19), считая при этом $P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u)$ сложной функцией, получим

$$\frac{\partial^{\ell+k} f(x,y)}{\partial x^{\ell}\partial y^{k}} \approx \frac{\partial^{\ell+k} P^{(*)}_{\tilde{k},N}(t,u)}{\partial t^{\ell}\partial u^{k}} \left(\frac{dt}{dx}\right)^{\ell} \left(\frac{du}{dy}\right)^{k}, \tag{20}$$

где $0 \le \ell \le N$, $0 \le k \le N$, $0 \le \ell + k \le N$.

С учётом замен (15) подстановка (17) в (20) влечёт окончательные выражения для приближённого дифференцирования вида

$$\frac{\partial^{\ell+k} f(x,y)}{\partial x^{\ell}\partial y^{k}} \approx \beta^{(*)}_{\ell+k} h^{-\ell} g^{-k} \sum_{i=\ell}^{N-k}\sum_{j=k}^{N-i-\ell} \frac{i!}{(i-\ell)!}\frac{j!}{(j-k)!} a^{(*)}_{\tilde{k},ij} t^{i-\ell} u^{j-k}, \tag{21}$$

где h, g – шаги интерполяции из (10), (12), $\beta^{(*)}_{m} = \begin{cases} (-1)^{m}, \text{ при } (x,y)\in G^{u}_{\tilde{k}}, \\ 1, \text{ при } (x,y)\in G^{d}_{\tilde{k}}. \end{cases}$

В (21) учтено, что $m(m-1)...(m-n+1)=\dfrac{m!}{(m-n)!}$. Это позволяет, предварительно записав в память члены последовательности $0!$, $1!$, … $N!$, вычислять произведения вида $m(m-1)...(m-n+1)$ за время одного деления, что снижает временную сложность приближённого дифференцирования.

При запомненных предварительно коэффициентах (18) аппроксимация производных сводится к дешифрации (5) и вычислению полиномов (21) по схеме Горнера за время [1] $t(1)=(N-k)(N-\ell)(2t_у+2t_д+t_с)$, где $t_у$, $t_д$, $t_с$ – время одного умножения, деления и сложения соответственно.

Таким образом, представлена обобщённая компьютерно-ориентированная схема приближённого вычисления частных производных порядка не выше степени аппроксимирующего полинома (17) на базе интерполяции по Ньютону. Схема обладает параллелизмом, а также инвариантностью относительно размеров области G [1].

Далее излагаемый подход применяется для вычисления двойных интегралов по прямоугольной области.

Кусочно-полиномиальная схема приближённого вычисления двойных интегралов. Пусть полином (17) построен на системе подобластей (2), (4) и справедливо приближённое равенство (19). Интегрирование (19) с учётом аддитивности интеграла по области интегрирования влечёт

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{\tilde{k}=1}^{P_xP_y}\left\{\iint_{G_{\tilde{k}}^d} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy+\iint_{G_{\tilde{k}}^u} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy\right\}, \qquad (22)$$

где $P_{\tilde{k},N}^{(*)}$ из (14).

Для подобласти $G_{\tilde{k}}$ из (2) запишем

$$\iint_{G_{\tilde{k}}} f(x,y)\,dx\,dy \approx I^d+I^u, \qquad (23)$$

в обозначениях

$$I^d=\iint_{G_{\tilde{k}}^d} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy,\quad I^u=\iint_{G_{\tilde{k}}^u} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy. \qquad (24)$$

Перейдём в интеграле I^d из (24) от двойного интеграла к повторному, что возможно [6], если предполагать функцию непрерывной по каждой переменной в области G. С учётом (16), а также замен (15) и следующих из них равенств: $dx=h\,dt$, $dy=g\,du$, запишем

$$\iint_{G_{\tilde{k}}^d} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy=hg\int_0^N dt\int_0^{N-t}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} a_{\tilde{k},ij}^{(*)}\,t^i u^j\,du\,. \qquad (25)$$

Непосредственное интегрирование (25) повлечёт

$$\iint_{G_{\tilde{k}}^d} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy=hg\int_0^N\left\{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\frac{1}{j+1}a_{\tilde{k},ij}^{(*)}\,t^i u^{j+1}\right\}\Bigg|_0^{N-t} dt=hg\int_0^N\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\frac{1}{j+1}a_{\tilde{k},ij}^{(*)}\,t^i(N-t)^{j+1}\,dt.$$

Отсюда с применением бинома Ньютона получим

$$\iint_{G_{\tilde{k}}^d} P_{\tilde{k},N}^{(*)}(x,y)\,dx\,dy=hg\int_0^N\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\frac{1}{j+1}a_{\tilde{k},ij}^{(*)}\,t^i\sum_{\ell=0}^{j+1}\alpha_{\ell,j}t^\ell\,dt\,, \qquad (26)$$

где

$$\begin{cases} \alpha_{\ell,j} = (-1)^{\ell} N^{j+1+\ell} C_{j+1}^{\ell}, \text{ при } \ell = \overline{0, j+1}, \\ \alpha_{\ell,j} = 0, \text{ при } \ell \geq j+2, \ j = \overline{0, N-i}, \ i = \overline{0, N}. \end{cases}$$

Раскрытие скобок и приведение подобных приведёт (26) к виду

$$\iint\limits_{G_{\tilde{k}}^{d}} P_{\tilde{k},N}(x,y)\,dx\,dy = hg \int\limits_{0}^{N} \sum_{i=0}^{N} \theta_{\tilde{k},i}^{d}\, t^{i}\, dt \,, \tag{27}$$

где

$$\theta_{\tilde{k},i}^{d} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{i} \frac{1}{j+1} a_{\tilde{k},i-\ell j}^{(*)} \alpha_{\ell,j} \,. \tag{28}$$

Непосредственное интегрирование (28) влечёт

$$\iint\limits_{G_{\tilde{k}}^{d}} P_{\tilde{k},N}(x,y)\,dx\,dy = hg \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} \theta_{\tilde{k},i}^{d}\, t^{i+1} \Bigg|_{0}^{N} . \tag{29}$$

Рассуждая аналогично в случае интеграла I^{u} из (24), запишем

$$\iint\limits_{G_{\tilde{k}}^{u}} \tilde{P}_{\tilde{k},N}(x,y)\,dx\,dy = hg \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} \theta_{\tilde{k},i}^{u}\, t^{i+1} \Bigg|_{0}^{N} , \tag{30}$$

где

$$\theta_{\tilde{k},i}^{u} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{i} \frac{1}{j+1} a_{\tilde{k},i-\ell j}^{(*)} \alpha_{\ell,j} \,, \tag{31}$$

С учётом соотношений (28)–(31) равенство (22) примет вид

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy \approx hg \sum_{\tilde{k}=1}^{P_x P_y} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} \theta_{\tilde{k},i}\, t^{i} \Bigg|_{0}^{N} , \tag{32}$$

где

$$\theta_{\tilde{k},i} = \theta_{\tilde{k},i}^{d} + \theta_{\tilde{k},i}^{u} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{i} \frac{1}{j+1} \left\{ a_{\tilde{k},i-\ell j}^{u} + a_{\tilde{k},i-\ell j}^{d} \right\} \alpha_{\ell,j} \,. \tag{33}$$

Коэффициенты (33) могут быть занесены в память компьютера, что позволит свести приближённое вычисление интеграла лишь к вычислению полинома (33) по схеме Горнера за время $t(1) = N\left(t_y + t_c\right)$.

Схема (32), (34) ориентирована на компьютерное вычисление двойных интегралов по прямоугольной области. Схема по построению инвариантна относительно размеров области и обладает естественным параллелизмом, как показано в [1].

Таким образом, изложены обобщённые компьютерно-ориентированные схемы приближённого вычисления функций двух переменных, их частных производных и двойных интегралов по прямоугольной области. Схемы инвариантны относительно размера области определения функции, обладают естественным параллелизмом [1]. Изложенный подход может быть использован для аппроксимации функций, производных и интегралов из стандартной библиотеки. За счёт алгоритмического подбора наименьшей степени аппроксимирующего полинома для данного числа подобластей удаётся снизить временную сложность вычислений. Детализированное описание схем и численного эксперимента приводится в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голиков А. Н.* Кусочно-полиномиальные схемы вычисления функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов на основе интерполяционного полинома Ньютона. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2010. – 150 с. Деп в ВИНИТИ 20.09.2010, № 528-В2010.

2. *Ромм Я.Е.* Бесконфликтные и устойчивые методы детерминированной параллельной обработки: дисс. … докт. техн. наук. – Таганрог: ТРТУ, 1998. – 546 с.; ВНТИ Центр. – № 05.990.001006.
3. *Ромм Я. Е., Фирсова С.А.* Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008. – 125 с.
4. *Аксайская Л.Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций: автореф. дисс. … канд. техн. наук. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2008.
5. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. Ч. II // Кибернетика и системный анализ. – Киев, 2007. – № 2. – С. 161-174.
6. *Гусак А.А.* Высшая математика в 2-х т. Т. 2. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 448 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Л.П. Фельдман.

Голиков Александр Николаевич
ГОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт».
E-mail: golicov89@mail.ru.
347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48.
Тел.: 88634601535.

Golikov Alexander Nikolaevich
State Educational Institution of Higher Professional Education «Taganrog State Pedagogical Institute» post-graduate student of chair of computer science.
E-mail: golicov89@mail.ru.
48, Iniciativnaya Street, Taganrog, 347936, Russia.
Phone: +78634601535.

УДК 621.391.2:57.08

Д.А. Краснобаев

АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПАТОЛОГИЯМИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ MATLAB

Рассматривается алгоритм параметрического распознавания реализаций медико-биологических процессов с патологиями. В качестве модели электроэнцефалограмм (ЭЭГ), предназначенной для исследования эффективности методов распознавания, выбраны стационарные эргодические случайные процессы, преобразуемые нелинейными процедурами с целью получения эффективных признаков для распознавания. Приведены блок-схемы алгоритмов обучения и классификации для данного метода, а также результаты эксперимента. Реализация алгоритма проведена в программной среде MATLAB.

Параметрическое распознавание; байесовский классификатор; решающее правило; ковариационные матрицы; электроэнцефалограмма.

D.A. Krasnobayev

ALGORITHM OF PARAMETRICAL RECOGNITION OF MEDICAL AND BIOLOGIC PROCESSES WITH PATHOLOGIES AND ITS REALISATION IN SOFTWARE PACKAGE MATLAB

The algorithm of parametrical recognition of realisations of medical and biologic processes with pathologies is considered. Stationary ergodic casual processes are used as electroencephalogram (EEG) signals, which are transformed by nonlinear procedures for the purpose of reception of effective signs for recognition. The block diagrams teaching and classification algorithms for