

## Раздел IV. Управление системами с распределенными параметрами

УДК 28;50

**И.М. Першин**

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ ПИРАМИДАЛЬНОГО ВИДА

*В настоящее время методы системного анализа с успехом применяются при исследовании объектов с распределенными параметрами. Безусловно, что системный анализ таких объектов связан с усложнением математического аппарата, но полученный результат открывает новые перспективы. Удастся исследовать и проектировать системы, оперирующие полями функций входа и выхода, а также выделить и изучить новые свойства известных объектов. В статье приводятся основные результаты исследований электромагнитных полей в объемных резонаторах пирамидального вида. Такие резонаторы имеют множество резонансных частот, при этом максимальная амплитуда для разных резонансных частот достигается в разных точках пирамиды. Показано, что в области резонанса вектор-потенциал электромагнитного поля может быть представлен в виде трехмерной пространственной моды, обладающей специфическими свойствами.*

*Распределенные системы; объемные резонаторы; пирамиды; пространственные моды; резонанс; электромагнитные поля.*

**I.M. Pershin**

### RESEARCH OF THE ELECTROMAGNETIC FIELDS IN ENDOVIBRATORS OF PYRAMIDAL KIND

*Currently, methods of system analysis have been successfully applied in the study of objects with distributed parameters. Certainly, systematic analysis of such objects is related complication of the mathematical apparatus, but this finding opens new perspectives. Can investigate and design systems that operate on function fields of input and output, as well as to identify and explore new properties of known objects. The article presents the main findings of electromagnetic fields in cavity resonators pyramidal form. Such resonators have a lot of resonance frequencies, the maximum amplitude, for different resonant frequencies, obtained in different parts of the pyramid. It is shown that in the resonance region the vector potential of electromagnetic field can be represented as a three-dimensional fashion, which has specific properties.*

*Distributed systems; endovibrators; pyramids; spatial fashions; resonance; electromagnetic fields.*

Процессы в окружающей нас среде неразрывно связаны с пространственными координатами и, как правило, их модели описываются уравнениями в частных производных. Существуют следующие подходы к исследованию таких моделей:

- ◆ конечномерная аппроксимация и решение задач методами сосредоточенных систем. В результате такой аппроксимации существенная часть свойств первоначального объекта теряется. Следует отметить, что при этом подходе, по сути дела, мы исследуем другой объект, который к первоначальному объекту имеет малое отношение;

- ◆ исследование методами распределенных систем. При этом подходе все первоначальные свойства объекта сохраняются и учитываются при анализе.

Этому подходу способствуют: развитый в последнее время математический аппарат анализа и синтеза систем с распределенными параметрами; стремительный взлет возможностей вычислительной техники; более высокие требования к проектируемым системам управления, как правило, требуется управлять полями функций выхода (температурными полями [1, 2], электромагнитными полями [3], полями давлений в водоносных горизонтах [4] и т.д.).

Безусловно, что системный анализ распределенных процессов связан усложнением математического аппарата, но полученный выигрыш стоит того. Удастся построить системы, управляющие полями функций выхода. Из теории известно, что для нахождения решения математической модели объекта, описываемого уравнениями в частных производных, используют разложение по собственным вектор-функциям оператора объекта (по некоторому ортогональному базису). При этом собственные вектор-функции (пространственные моды) формируются с учетом геометрических параметров объекта и его граничных условий. Так, например электромагнитные поля в объемных резонаторах [5, 6], температурные поля [1, 2] описываются совокупностью пространственных мод, физические параметры которых зависят от граничных условий и геометрических размеров объемных резонаторов. Для таких объектов управления, отнесенных в [1, 2] к классу пространственно-инвариантных, разработана методика синтеза распределенных регуляторов, описана техническая реализация синтезированных регуляторов.

В практике встречаются задачи, связанные с выделением заданных пространственных мод из распределенного сигнала. Эти задачи аналогичны задачам построения фильтров для сосредоточенных систем, выделяющих сигнал с заданной несущей частотой  $\omega_j$ . В рассматриваемом случае из распределенного сигнала выделяется пространственная мода, имеющая заданную пространственную частоту.

*Рассмотрим пример.* Положим, что требуется передать сигнал в виде вектора

$C(\tau) = [C_i(\tau)]$ , ( $i=1,2,3,\dots$ ). При этом  $C_i(\tau)$  может иметь достаточно широкий

частотный спектр  $C_i(\tau) = \sum_{j=1}^N \bar{C}_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\omega_j \cdot \tau)$ , где  $\bar{C}_{i,j}(\tau)$  – полезный сигнал,

$\omega_j$ , ( $j=1,2,3,\dots$ ) – несущие частоты.

В качестве ортогонального базиса выберем функции (пространственные моды)  $\sin(\psi_i \cdot x)$ , где  $\Psi_i = \frac{\pi \cdot i}{L_x}$  – пространственные частоты ( $i=1,2,3,\dots$ );  $L_x$  – заданное число.

Умножим вектор  $C(\tau)$  на вектор  $[\sin(\psi_i \cdot x)]^T$  (на соответствующий ортогональный базис). По сути, мы осуществляем пространственную модуляцию сигналов  $C_i(\tau)$ . Функция  $C_i(\tau) \cdot \sin(\psi_i \cdot x)$  названа в [8] магистралью передачи информации. Распределенный сигнал на выходе передающего устройства ( $f(x,\tau)$ ) представляет сумму сигналов всех магистралей

$$f(x,\tau) = \sum_{i=1}^N C_i(\tau) \cdot \sin(\psi_i \cdot x), \quad (0 \leq x \leq L_x),$$

где  $x$  – пространственная координата;  $N$  – заданное число, которое может быть сколь угодно большим. «Упаковать» полезный сигнал в такую форму – задача достаточно простая. Положим, что имеется устройство, которое принимает сигнал  $f(x,\tau)$  с некоторой ошибкой (возмущением  $\xi(x,\tau)$ )  $f^*(x,\tau) = f(x,\tau) + \xi(x,\tau)$ . «Распаковать» сигнал  $f^*(x,\tau)$  (выделить соответствующие магистрали передачи информации) – задача достаточно сложная.

Для выделения из функции  $f^*(x, \tau)$  заданных магистралей передачи информации (заданных пространственных мод), в [7–9] разработаны математические модели пространственных сканеров и распределенных фильтров, позволяющих определить присутствие заданных пространственных мод в распределенном сигнале, а также выделить заданную пространственную моду из распределенного сигнала.

Математические модели распределенных фильтров и пространственных сканеров могут оперировать и с распределенными сигналами различной физической природы вида  $f(x_1 \dots x_m, \tau)$ , ( $m$  – заданное число).

Количество информации, которое может быть «упаковано» с помощью распределенного сигнала  $f(x, \tau)$  и «распаковано» с помощью распределенных фильтров, практически не ограничено. Безусловно, для передачи и приема такой информации потребуются новые технические решения. Положим, что сигнал  $f(x, \tau)$  сформирован физическим процессом и несет информацию о сейсмических процессах, протекающих в земной поверхности. «Распаковывая» его с помощью распределенных фильтров, может быть получена дополнительная информация о протекающих процессах, например, если амплитуды пространственных мод при увеличении пространственных частот, со временем возрастают, то идет увеличение внутренней энергии процесса (увеличивается внутреннее напряжение).

Существуют и физические конструкции, которые формируют пространственные моды в некотором объеме. К числу таких конструкций относятся различные пирамиды. Рассмотрим анализ электромагнитных полей в пирамиде.

**1. Математическая модель электромагнитных полей пирамиды.** Рассмотрим пирамиду как объемный резонатор (см. рис. 1),

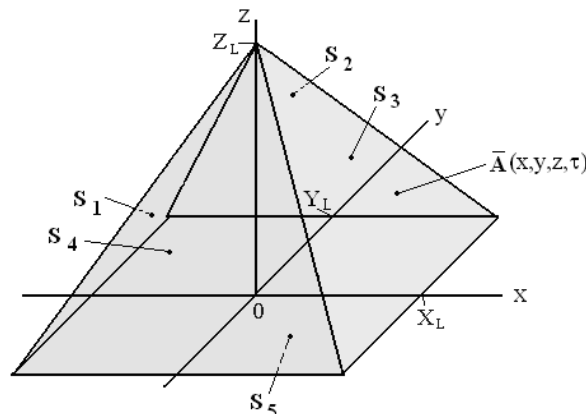


Рис. 1. Схема пирамиды

где  $X_L, Y_L, Z_L$  – заданные значения.

При этом будем полагать, что боковая поверхность пирамиды покрыта материалом, отражающим электромагнитные поля.

Вектор-потенциал электромагнитного поля резонатора, в соответствии с уравнениями Максвелла и Гельмгольца [5, 6], может быть записан в следующем виде:

$$\text{rot rot}(\bar{A}(x, y, z, \tau)) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d^2 \bar{A}(x, y, z, \tau)}{d\tau^2} = 0, \quad (1)$$

$x, y, z \in V$ ,

где  $\bar{A}(x, y, z, \tau)$  – вектор-потенциал электромагнитного поля резонатора,  $x, y, z$  – пространственные координаты,  $\tau$  – время,  $V$  – область изменения  $x, y, z$  (объем

пирамиды),  $\varepsilon, \mu$  – диэлектрическая (ф/м) и магнитная (гн/м) проницаемость среды резонатора соответственно.

Граничные условия для уравнения (1) будем полагать заданными соотношениями

$$\partial \bar{A}(x, y, z, \tau) / \partial n_{s_i} = 0, \quad (2)$$

( $i=1,2,3,4,5$ ),

$$\bar{A}(0,0,0, \tau) = 0,$$

где  $n_{s_i}$  – нормаль к  $i$ -й боковой поверхности ( $S_i$ ).

Входное воздействие в рассматриваемый объемный резонатор осуществляется в заданной точке

$$\bar{A}(x^*, y^*, z^*, \tau) = U(\tau), \quad (3)$$

$$x^*, y^*, z^* \in V.$$

Могут быть реализованы и другие варианты входного воздействия.

Как известно

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\bar{A}(x, y, z, \tau)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{A}(x, y, z, \tau)) - \nabla^2 \bar{A}(x, y, z, \tau). \quad (4)$$

Полагая  $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{A}(x, y, z, \tau)) = 0$  (в рассматриваемом объеме отсутствуют заряды [5]), уравнение (1) представим в виде однородных уравнений Гельмгольца

$$-\nabla^2 \bar{A}(x, y, z, \tau) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d^2 \bar{A}(x, y, z, \tau)}{d\tau^2} = 0, \quad (5)$$

$$x, y, z \in V.$$

При этом граничные условия записываются в виде (2), а входное воздействие в виде (3). В соответствии с математической моделью электромагнитного поля в пирамиде была создана дискретная модель, используя которую была составлена программа моделирования электромагнитных полей в пирамиде. Составленная программа позволяет определить значения координат  $X, Y, Z$ , в которых достигается максимальная амплитуда при заданном входном воздействии (программа написана на Delfi).

В результате моделирования для равносторонней пирамиды высотой  $H=140$  м были получены частотные характеристики, приведенные на рис. 3. При этом, число точек дискретизации по осям  $x, y, z$  (рис. 1,2) было выбрано равным 11. Входное воздействие было задано в виде:  $U(x^*, y^*, z^*, \tau) = Q \cdot \sin(\omega_1 \cdot \tau)$ , (где  $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot \omega$ ,  $\omega$  – заданная (круговая) частота,  $Q=10$ ), а значения  $x^*, y^*, z^*$  выбирались в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2. При моделировании полагалось, что пирамида изготовлена из карбоната, для которого  $\varepsilon \cdot \mu = 7.467 \cdot 10^{-14}$ .

По результатам моделирования при  $Q=10$  построены графики изменения амплитуды электромагнитных колебаний в зависимости от частоты  $\omega$  (см. рис. 3).

На рис. 4 на схему пирамиды ( $H=140$  м) нанесены точки с максимальным значением амплитуды и с указанием значения резонансной частоты  $\omega$  в Гц. Следует отметить, что максимальная амплитуда для разных резонансных частот достигается в разных точках пирамиды.

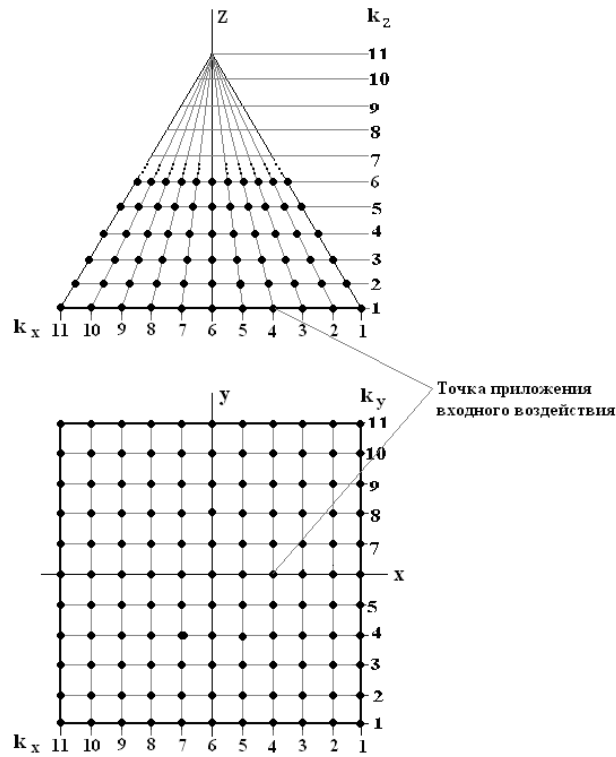


Рис. 2. Схема дискретизации

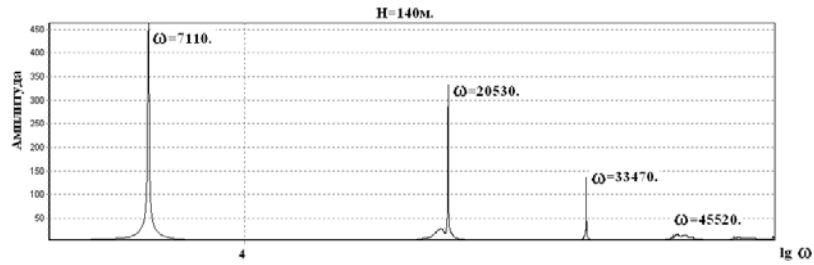


Рис. 3. Частотные характеристики для  $H=140$  м

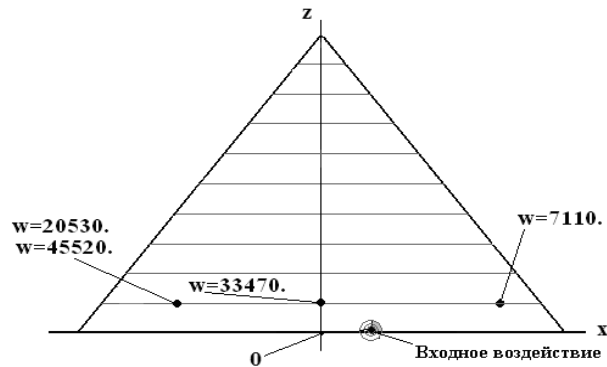


Рис. 4. Схема расположения точек с максимальным значением амплитуды

Используя приведенную выше математическую модель, можно определить значение параметра  $a = \epsilon \cdot \mu$  из условия, что первая резонансная частота равна  $\omega_r$ . Положим, что для пирамиды  $H=146\text{м}$  известна резонансная частота  $\omega_r=438\text{ Гц}$ , при этом входное воздействие было задано в виде  $U(x^*, y^*, z^*, \tau) = Q \cdot \sin(\omega_1 \cdot \tau)$ ,  $\omega_1=2\pi \cdot \omega_r$ , а значения  $x^*, y^*, z^*$  были заданы в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2. Для вычисления значения  $a = \epsilon \cdot \mu$ , по заданным значениям  $H$  и  $\omega_r$ , была составлена программа, используя которую, для заданных значений  $H=146\text{ м}$  и резонансной частоты  $\omega_r=438\text{ Гц}$  вычисленное, с использованием программы, значение  $a = \epsilon \cdot \mu=0.18116640/10000000000$  (см. рис. 5, где  $am2$  –максимальная амплитуда электромагнитного поля в пирамиде).

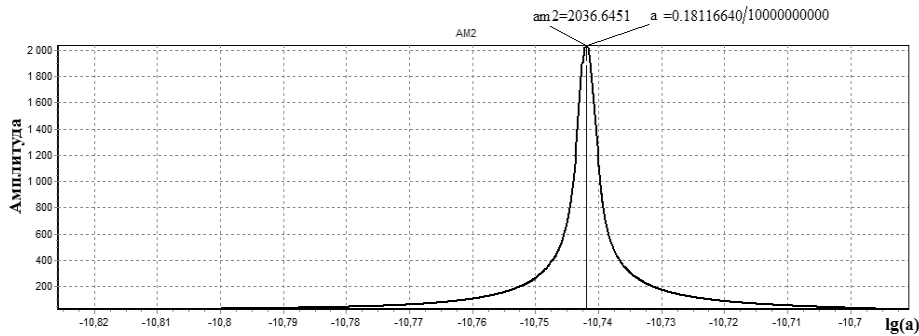


Рис. 5. Определение параметра  $a$

Безусловно, что для вычисленного значения  $a = \epsilon \cdot \mu$  и заданной высоте пирамиды ( $H$ ), может быть определено большое количество резонансных частот, но первая будет равна  $438\text{ Гц}$ . Вычисления показывают, что чем точнее вычисления, тем больше амплитуда резонанса.

**2. Динамические характеристики сигналов в области резонанса для пирамиды  $H=146\text{м}$ .** Для определения динамики электромагнитных полей рассматриваемой пирамиды подадим в точку приложения входного воздействия гармонический сигнал с амплитудой ( $Q=10$ ) см. рис. 2, а значение функции выхода будем измерять в точке, в которой достигается максимальная амплитуда  $k_x=7, k_y=2, k_z=2$ . По результатам расчетов построены графики, приведенные на рис. 6. Рассматриваемая пирамида достигает максимального значения амплитуды резонанса за время  $120\text{ секунд}$ .

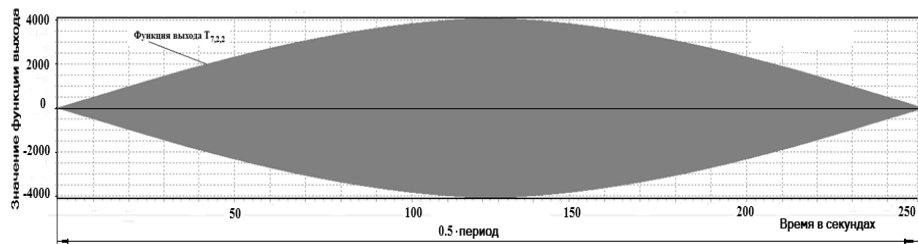


Рис. 6. График функций выхода

На рис. 7. показаны области изменения функции выхода в соответствующих точках дискретизации при  $\tau=120\text{ с}$ .

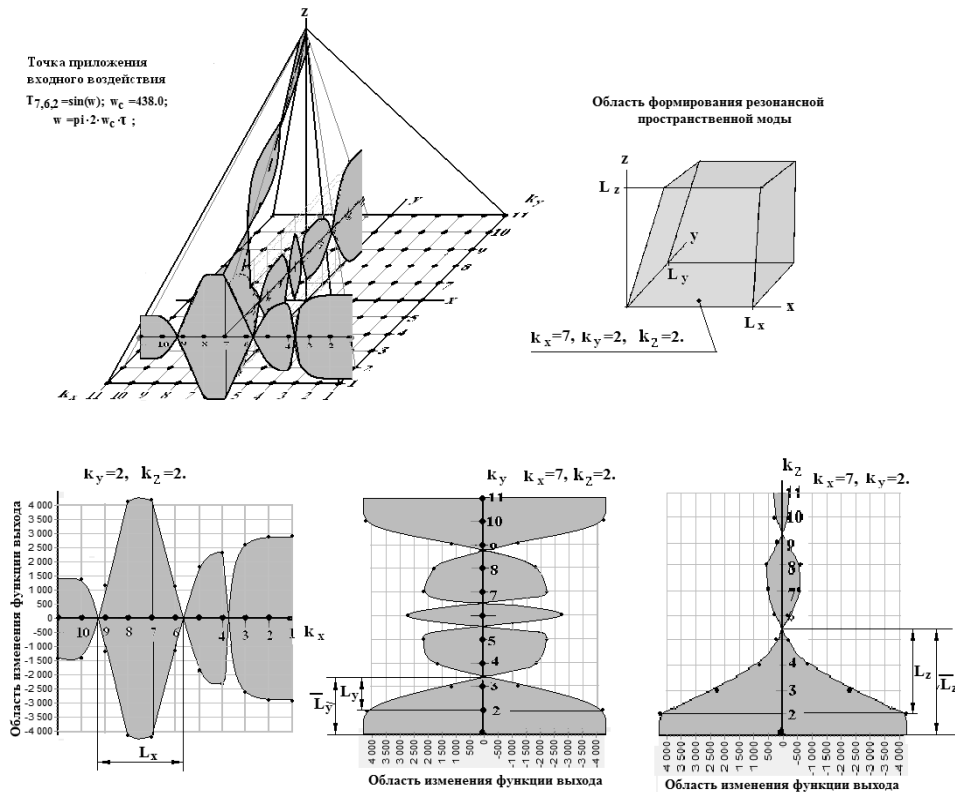


Рис. 7. Графики функций

Как показывают графики, резонансный сигнал имеет сложную объемную структуру. Следует отметить, что при достижении резонанса геометрические размеры  $L_x, L_y, L_z$  остаются постоянными и равными  $L_x = 62,4132$  м,  $L_y = 20,997$  м,  $L_z = 54,1241$  м. Изменяется только амплитуда сигналов (см. рис. 7). Вектор-потенциал электромагнитного поля в области резонанса можно описать трехмерной пространственной модой, у которой амплитуда изменяется во времени

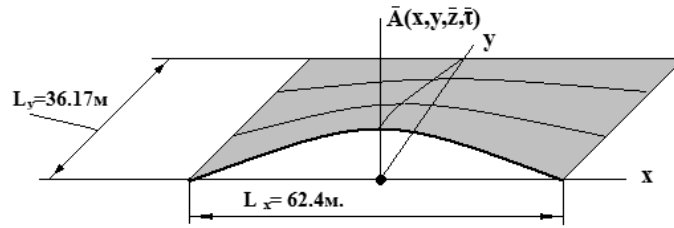
$$\bar{A}(x, y, z, \tau) = D(\tau) \cdot \sin(\omega_c \cdot \tau) \cdot \cos(\psi_x \cdot x) \cdot \cos(\psi_y \cdot y) \cdot \cos(\psi_z \cdot z), \quad (6)$$

$$\psi_x = \pi / L_x, \psi_y = 0.5 \cdot \pi / L_y, \psi_z = 0.5 \cdot \pi / L_z,$$

где  $L_x/2 < x < L_x/2, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z$ ,  
 где  $\omega_c$  – частота резонанса,  $D(\tau)$  – функция, определяющая изменение амплитуды в резонансной точке.

На рис. 8 показано пространство формирования функции выхода. Для представления сигнала, сформированного на плоскости  $\{xy, z=0\}$  (в двумерном пространстве), требуется трехмерное пространство. Для представления сигнала (6) требуется пространство больше трехмерного (рис. 9).

Исследуя поведение функции  $T_{7,2,2}$  на более длительных интервалах времени (см. рис. 6), получено, что рассматриваемая функция во временной области может быть представлена в виде  $T_{7,2,2} = M \cdot \sin(\omega) \cdot \sin(\omega_1 \tau)$ , где  $M=4078$ ;  $\omega=2 \cdot \pi \cdot 438 \cdot \tau$ ,  $\tau$  – время,  $\omega_1=2 \cdot \pi \cdot \omega_2 \cdot \tau$ ,  $\omega_2$  – частота модулирующего сигнала (для показанного на рис. 6 сигнала  $\omega_2=1/\text{период} = 1/526$ ).



$\bar{z}, \bar{t}$  - фиксированные значения переменных

Рис. 8. Пространство формирования функции выхода

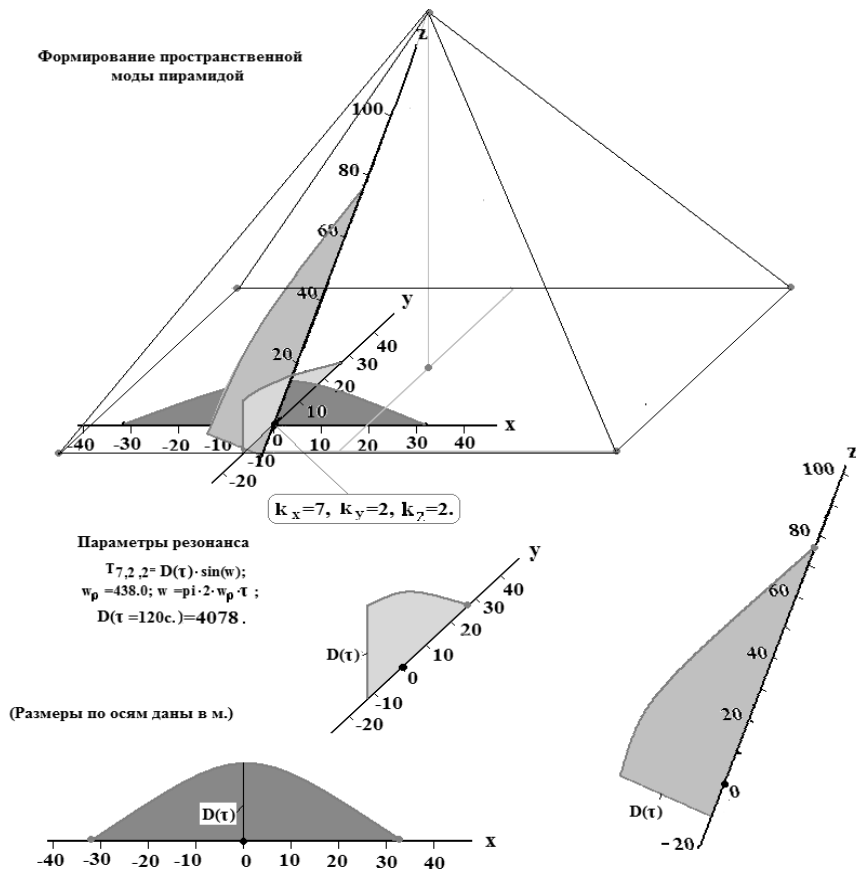


Рис. 9. Формирование функции выхода в пирамиде

Результаты численных экспериментов показывают, что частота модулирующего сигнала зависит от точности вычисления параметра  $A$  для заданной резонансной частоты. Чем выше точность вычисления значения  $A$ , тем выше значение коэффициента усиления  $K=M/Q$  и соответственно больше период- $T$  (см. рис. 6).

Аналитическую зависимость  $T(K)$  определить достаточно сложно. Используя результаты моделирования процессов, на рис. 10 построен график  $T(K)$  в логарифмическом масштабе для пирамиды с одинаковыми гранями, высота которой равна 146 м.



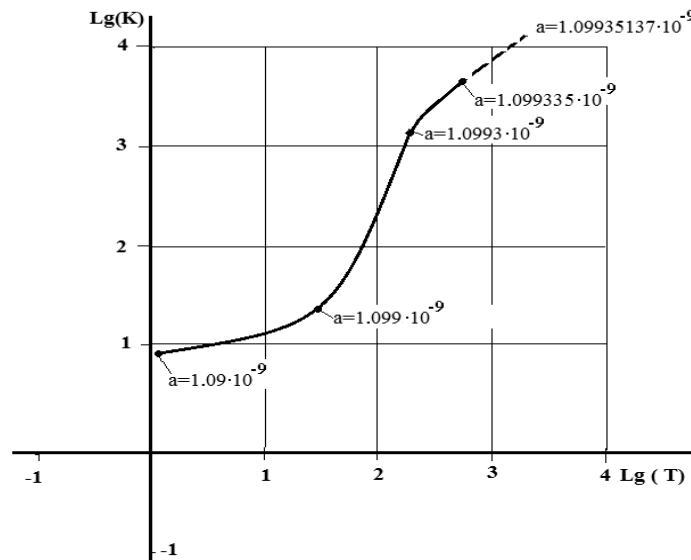


Рис. 10. График изменения функции  $T(K)$

#### Заключение

1. В статье исследовались электромагнитные поля пирамиды. *Безусловно, что это только одна грань из множества граней-загадок пирамид.* Показано, что пирамида обладает ярко выраженными фильтрационными свойствами. Для разных резонансных частот максимальное значение амплитуды достигается в разных геометрических точках пирамиды.
2. По результатам экспериментальных исследований могут быть определены электромагнитные параметры материала пирамиды и вычислен спектр резонансных частот для исследуемой пирамиды. По аналогичной методике, если заданы электромагнитные параметры и резонансная частота, можно определить геометрические размеры пирамиды.
3. При моделировании резонансного состояния пирамиды на электромагнитные волны с частотой  $\omega_c = 438$  Гц получены:
  - ◆ сигналы с максимальной амплитудой формируются в некотором объеме, при этом границы объема, при установившемся значении резонансной амплитуды не изменяются во времени;
  - ◆ так как границы объема не изменяются, то сигнал может быть представлен в виде трехмерных пространственных мод;
  - ◆ для изображения вектор-потенциал электромагнитного поля в области резонанса требуется четырехмерное пространство.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Першин И.М. Синтез систем с распределенными параметрами. – Пятигорск: Изд-во «РИО КМВ», 2002. – 212 с.
2. Першин И.М. Синтез систем с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 6.
3. Воронин А.Ю., Першин И.М. Синтез распределенной системы управления магнитным полем тороидальной камеры // Мехатроника, автоматизация, управление. – М., 2006. – № 12.
4. Малков А.В., Першин И.М. Синтез распределенных регуляторов для систем управления гидrolитосферными процессами. – М.: Научный мир, 2007. – 256 с.

5. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Советское радио, 1971. – 664 с.
6. Баскаков С.И. Основы электродинамики. Учебное пособие для вузов. – М.: Советское радио, 1973. – 248 с.
7. Першин И.М. Распределенная система передачи информации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 11.
8. Першин И.М. Распределенные системы обработки информации. – Пятигорск: РИА-КМВ, 2008. – 148 с.
9. Першин И.М. Система обработки распределенных сигналов // Труды VIII Международной научно-технической конференции по динамике технологических систем. Т. 1. – Ростов-на-Дону, 2007. – С. 196-202.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Л. Заковоротный.

**Першин Иван Митрофанович**

Пятигорский государственный технологический университет.

E-mail: ivmp@yandex.ru.

357500, г. Пятигорск, пр. 40-лет Октября, 56.

Тел.: 88793399844.

Кафедра управления и информатики в технических системах; заведующий кафедрой, профессор.

**Pershin Ivan Mitrofanovich**

Pyatigorsk State Technological University.

E-mail: ivmp@yandex.ru.

56, 40 years of October Street, Pyatigorsk, 357500, Russia.

Phone: +78793399844.

The Department of Management and Informatics in Technical Systems; Head of Department; Professor.

УДК 681.5

**Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плешивцева**

**ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ:  
ПРОГРАММНЫЕ И ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ\***

*Предлагаются некоторые пути дальнейшего развития опирающейся на фундаментальные закономерности предметной области прикладной теории управления системами с распределенными параметрами применительно к центральным проблемам построения конструктивных алгоритмов программной оптимизации и аналитического конструирования агрегированных автоматических регуляторов. Для построения программных управляющих воздействий используется специальный метод редукции к задачам полубесконечной оптимизации, разрешаемым с помощью альтернансных свойств искомым экстремалей.*

*Система с распределенными параметрами; оптимальное управление; параметризация управляющих воздействий; полубесконечная оптимизация; альтернансный метод; макрорепериментальная; агрегированные регуляторы.*

---

\* Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 09-08-00297), аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2011 гг.» (проект № 2.1.2/4236) и Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (Государственный контракт № П231 от 23.07.2009 г.)