5. *Гольдштейн Л.Д.,. Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Советское радио, 1971. – 664 с.
6. *Баскаков С.И.* Основы электродинамики. Учебное пособие для вузов. – М.: Советское радио, 1973. – 248 с.
7. *Першин И.М.* Распределенная система передачи информации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 11.
8. *Першин И.М.* Распределенные системы обработки информации. – Пятигорск: РИА-КМВ, 2008. – 148 с.
9. *Першин И.М.* Система обработки распределенных сигналов // Труды VIII Международной научно-технической конференции по динамике технологических систем. Т. 1. – Ростов-на-Дону, 2007. – С. 196-202.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Л. Заковоротный.

Першин Иван Митрофанович
Пятигорский государственный технологический университет.
E-mail: ivmp@yandex.ru.
357500, г. Пятигорск, пр. 40-лет Октября, 56.
Тел.: 88793399844.
Кафедра управления и информатики в технических системах; заведующий кафедрой, профессор.

Pershin Ivan Mitrofanovich
Pyatigorsk State Technological University.
E-mail: ivmp@yandex.ru.
56, 40 years of October Street, Pyatigorsk, 357500, Russia.
Phone: +78793399844.
The Department of Management and Informatics in Technical Systems; Head of Department; Professor.

УДК 681.5

Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плешивцева

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ПРОГРАММНЫЕ И ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ*

Предлагаются некоторые пути дальнейшего развития опирающейся на фундаментальные закономерности предметной области прикладной теории управления системами с распределенными параметрами применительно к центральным проблемам построения конструктивных алгоритмов программной оптимизации и аналитического конструирования агрегированных автоматических регуляторов. Для построения программных управляющих воздействий используется специальный метод редукции к задачам полубесконечной оптимизации, разрешаемым с помощью альтернансных свойств искомых экстремалей.

Система с распределенными параметрами; оптимальное управление; параметризация управляющих воздействий; полубесконечная оптимизация; альтернансный метод; макропеременная; агрегированные регуляторы.

* Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 09-08-00297), аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2011 гг.» (проект № 2.1.2/4236) и Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (Государственный контракт № П231 от 23.07.2009 г.)

E.Ya. Rapoport, Yu.E'. Pleshivtseva

OPTIMIZATION OF SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS: PROGRAMMED AND POSITIONAL STRATEGIES OF CONTROL

The approaches and methods for further development of applied theory of systems with distributed parameters are suggested to solve problems of construction of programm optimisation algorithms and analytical designing of automatic regulators. These approaches are based on fundamental laws of different subject areas.

Distributed parameter system; optimal control; control actions parametrization; semi-infinite optimization; alternance method; macro-variable; aggregated regulators.

Введение. Практическое использование общих методов современной теории управления системами с распределенными параметрами (СРП) серьезно осложняется необходимостью их существенной адаптации применительно к широкому спектру приобретающих принципиальный характер особенностей прикладных задач, от которых вынужденно абстрагируется формализм теоретических схем в постановочном, алгоритмическом и вычислительном аспектах исследуемых проблем. Только на приоритетной основе сущностных физических закономерностей соответствующей предметной области и реально предъявляемых требований к управляемым процессам могут быть получены алгоритмически точные и технически реализуемые решения таких задач в рамках опирающихся на эту фактологическую базу модифицированных постановок даже в тех ситуациях, когда наиболее употребительные формальные модели приводят либо вообще к выводам об отсутствии этих решений, либо к теоретически существующим, но практически неосуществимым управляющим воздействиям. В настоящей работе рассматриваются некоторые пути развития в данном направлении прикладной теории оптимального управления СРП применительно к центральным проблемам построения конструктивных алгоритмов программной оптимизации и аналитического конструирования автоматических регуляторов.

1. Краевые задачи программного управления динамическими моделями систем с распределенными параметрами. Известные трудности решения краевых задач оптимального управления динамическими объектами (ЗОУ) в классической двухточечной формулировке приобретают принципиальный характер применительно к бесконечномерным СРП и усугубляются в целом ряде ситуаций, представляющих практический интерес, неуправляемостью объекта относительно требуемых конечных состояний по типичной причине их несогласованности с граничными условиями математических моделей, описывающих поведение объекта [1].

Возможный способ преодоления отмеченных затруднений состоит в переходе к заведомо разрешимой ЗОУ с заданным целевым множеством в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, которое отвечает достижимым значениям практически всегда существующих и, как правило, оцениваемых в прикладных задачах в равномерной метрике допусков на отклонение от номинальной точки, фиксируемой положением правого конца фазовой траектории в исходной двухточечной схеме [1]. Ниже приводятся формальная постановка и предлагаемые способы решения ЗОУ СРП в указанной трактовке.

Постановка задачи. Применительно к типовой пространственно-одномер-ной модели СРП в форме линейного стационарного уравнения в частных производных параболического типа с краевыми условиями Дирихле, Неймана или их линейной комбинации [1], метод конечных интегральных преобразований [1, 2] приводит к описанию управляемой функции состояния $Q(x,t)$ объекта с распределенными параметрами в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t_1]$ бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем бесконечный ряд по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n,t) + \bar{u}_n(\mu_n,t) + d_{0n}u_0(t) + d_{1n}u_1(t);$$
$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}_0^{(0)}(\mu_n),\ n = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\, \varphi_n(\mu_n, x). \tag{2}$$

Здесь $\bar{u}_n(\mu_n, t)$ – моды разложения внутреннего распределенного управляющего воздействия $u(x,t)$ в ряд вида (2):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, t)\, \varphi_n(\mu_n, x); \tag{3}$$

$u_0(t)$ и $u_1(t)$ – граничные управления, сосредоточенные в точках $x = x_0$ и $x = x_1$ соответственно; μ_n^2 – собственные числа; d_{0n}, d_{1n} – известные коэффициенты, и $\bar{Q}_0^{(0)}(\mu_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ – заданное начальное состояние объекта (1).

Управляющие воздействия стесняются ограничениями:

$$u_{\min} \le u(x,t) \le u_{\max};\ u_{1\min} \le u_1(t) \le u_{1\max};\ u_{0\min} \le u_0(t) \le u_{0\max};$$
$$x \in [x_0, x_1];\ t \in [0, t_1], \tag{4}$$

с заданными границами диапазона их возможного изменения.

Пусть качество процесса управления оценивается интегральным функционалом

$$I = \int_0^{t_1} f_0\left(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{W}, t\right) dt \to \min_{\mathbf{W}}, \tag{5}$$

с заданной подынтегральной функцией f_0 своих аргументов, где $\bar{\mathbf{Q}} = \left(\bar{Q}_n(\mu_n, t)\right)$, $\mathbf{W}(t) = \left(\bar{u}_n(\mu_n,t), u_0(t), u_1(t)\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, включая центральную задачу быстродействия при $f_0\left(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{W}, t\right) = 1$.

Пусть далее требуется за время t_1 обеспечить приближение $Q(x, t_1)$ к заданному пространственному распределению управляемой величины $Q^{**}(x)$ с допустимой абсолютной точностью ε согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1)\, \varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \le \varepsilon, \tag{6}$$

определяющему с учетом (2) целевое множество допустимых конечных состояний СРП с оценкой отклонений от $Q^{**}(x)$ в равномерной метрике, включая вариант неуправляемости объекта (1) относительно состояния $Q^{**}(x)$, для которого заведомо выполняется неравенство $\varepsilon > 0$ для достижимых значений ε в (6).

Необходимо найти оптимальное управление $\mathbf{W}^*(t)$, которое переводит бесконечномерный объект управления (1) из заданного начального состояния в требуемое конечное, согласно (6), при минимальном значении критерия оптимальности (5) в условиях ограничений (4).

Приведенная постановка ЗОУ (1)–(6) легко распространяется на пространственно-многомерные линейные модели СРП с переходом к их описанию в виде, подобном (1), для временных мод разложения управляемой величины теперь уже в кратные ряды по собственным функциям путем последовательного применения конечных интегральных преобразований к исходным уравнениям объекта по каждой из пространственных переменных. Аналогичное описание СРП может быть получено в пространстве коэффициентов разложения распределенного выхода системы в бесконечные ряды по ортогональному семейству базисных функций пространственных координат, отличных от собственных функций исследуемых моделей [3] или путем дифференциально-разностной (в том числе, в конечно-элементной форме) аппроксимации исходных как линейных, так и нелинейных уравнений, моделирующих поведение объекта.

Можно показать, что точное описание нелинейных моделей ОРП представляется также бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n^2\bar{Q}(\mu_n,t) + f_n(\bar{\mathbf{Q}}) + \bar{u}_n(\mu_n,t) + d_{0n}u_0(t) + d_{1n}u_1(t);$$
$$\bar{Q}_n(\mu_n,0) = \bar{Q}_0^{(0)}(\mu_n),\ \ n = 1,2,... \qquad (7)$$

относительно временных мод разложения $Q(x,t)$ в ряд вида (2) по собственным функциям линейного приближения исходных уравнений объекта и отличающегося от (1) только функциями $f_n(\bar{\mathbf{Q}}) \neq 0$, определяемыми в явной форме разностью действительного и линеаризованного дифференциальных операторов по пространственной переменной. В дальнейшем для простоты рассматривается базовая задача программного управления (1)–(6) и указываются пути распространения результатов для более сложных моделей СРП.

Параметризация управляющих воздействий и редукция к задаче полубесконечной оптимизации. На бесконечномерную задачу (1)–(6) распространяется в условиях (4), (6) стандартная процедура принципа максимума Понтрягина, применение которой приводит к сложной, практически неразрешимой краевой задаче оптимального управления (П-системе), формально определяющей параметрическое представление $\mathbf{W}^*(t)$ с точностью до граничных значений бесконечного числа сопряженных переменных [1].

В условиях (6) предложен [4] способ последовательной конечномерной параметризации $\mathbf{W}^*(t)$ на множестве финишных значений $\tilde{\psi}_i,\ i = \overline{1,N}$, первых N сопряженных функций, соответствующих первым N модам $\bar{Q}_n,\ n = \overline{1,N}$, в (1), при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t_1),\ i > N$ (“$\psi^{(N)}$-параметризация”):

$$\psi^{(N)} = \big(\psi_i(t_1)\big) = (\tilde{\psi}_i),\ \ i = \overline{1,N};\ \psi_i(t_1) = 0,\ i > N. \qquad (8)$$

Равенства (8) представляют собой условия трансверсальности на правом конце траектории в бесконечномерном фазовом пространстве СРП с некоторыми фиксированными конечными значениями $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1,N}$, первых N мод $\bar{Q}_n(\mu_n,t)$ при $t = t_1$ и свободными величинами $\bar{Q}_n(\mu_n,t_1)$ для всех $n > N$.

В условиях (8) минимально достижимые в классе управлений, однозначно характеризуемых вектором $\psi^{(N)}$, значения $\varepsilon_{\min}^{(N)}$ ошибки ε равномерного приближения $Q(x,t_1)$ к $Q^{**}(x)$, т.е. минимаксные погрешности приближения на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, монотонно убывают с ростом $N \in \{\overline{1,\rho}\}$:

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \ldots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \ldots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0, \tag{9}$$

характеризуя сужающееся к $Q^{**}(x)$ семейство целевых множеств для $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)},\ j = \overline{1,\rho},$ в (6) вплоть до значения $\varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0$, где точная нижняя грань $\varepsilon_{\inf}$ оказывается большей или равной нулю, соответственно для неуправляемых или управляемых относительно $Q^{**}(x)$ объектов[4].

Неравенства (9) создают потенциальные возможности обеспечения требуемой точности $\varepsilon > 0$ достижения $Q^{**}(x)$ при конечном числе *N*, принципиально упрощая, тем самым, краевую задачу оптимального управления СРП.

В [4] установлен принцип минимальной сложности $\psi^{(N)}$-параметризованной структуры оптимальных программных управлений $\mathbf{W}^{*}(\psi^{(N)},t)$, согласно которому за счет свободы выбора конечных значений $\bar{Q}_n(\mu_n,t_1),\ n > N$, оптимальные управляющие воздействия в рассматриваемой ЗОУ характеризуются минимально возможной для данного значения ε в (6) размерностью $N = N_0$ вектора $\psi^{(N_0)}$, устанавливаемой по определению величин минимакса в последовательности неравенств (9):

$$N_0 = \upsilon \quad \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\upsilon-1)},\ \upsilon \in \{1,\rho\}. \tag{10}$$

В характерных частных случаях, когда из условий (8) следуют тождества $\psi_i(t) \equiv 0$ для всех $i > N$, а в качестве аргументов f_0 в (5) фигурируют не более *N* первых составляющих $\bar{Q}_n$, исходная ЗОУ СРП сводится к управлению усеченной конечномерной подсистемой первых *N* уравнений модели объекта (1) [4], что кардинальным образом упрощает задачу определения структуры параметризованных программных управлений $\mathbf{W}^{*}(\psi^{(N_0)},t)$.

Дальнейший прямой путь непосредственного вычисления вектора $\psi^{(N_0)}$ связан с необходимостью решения, как правило, существенно нелинейной и весьма сложной даже при конечном числе N_0 компонент $\psi^{(N_0)}$ П-системы принципа максимума. Возникающие здесь серьезные затруднения могут быть во многих случаях преодолены путем построения отображений $\psi^{(N)} \to \Delta^{(N)}$ на множество параметров $\Delta^{(N)} = (\Delta_i),\ i = \overline{1,N},$ непосредственно характеризующих управляющие воздействия оптимальной структуры в пространственно-временной области их определения.

Аналитические условия оптимальности в совокупности с дополнительной информацией о свойствах оптимизируемых процессов в конкретной предметной области в целом ряде модельных ситуаций вполне определяют характер оптимальных управляющих воздействий на участках их непрерывного изменения в пространственно-временной области и позволяют выявить в зависимости от заданной величины ε в (6) возможные варианты компоновки оптимальных программ из этих участков с конечным числом разрывов в точках их"сшивания" [4-7]. Эти точки и выступают чаще всего в роли параметров Δ_i, приобретающих, тем самым, очевидный физический смысл. Последующее сопоставление $\psi^{(N)}$- и $\Delta^{(N)}$-параметризованных структур создает возможности построения однозначных отображений $\psi^{(N)} \to \Delta^{(N)}$ в форме замкнутой системы соотношений, связывающих компоненты $\psi^{(N)}$ и $\Delta^{(N)}$ [4, 5]. Переход к «$\Delta^{(N)}$-параметризации» управляющих воздействий сохраняет базовые соотношения (9) и (10) [4].

Во многих случаях условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина позволяют непосредственно получить $\Delta^{(N)}$-параметризованное представление $\mathbf{W}^*(\Delta^{(N_0)}, t)$ оптимального управления, минуя предварительный этап $\psi^{(N)}$-параметризации [1, 4-7]. Кроме того, в целом ряде прикладных задач изначально требуется найти управляющие воздействия в заданном классе $\Delta^{(N)}$-параметризуемых функций, согласно исходным требованиям, диктуемым техническими возможностями их реализации [6].

Интегрирование уравнений объекта (1) с $\Delta^{(N)}$-параметризованными управлениями $\mathbf{W}(\Delta^{(N)}, t)$ дает возможность получить, согласно (2), конечное состояние объекта $Q(x, t_1)$ и значение критерия оптимальности (5) в виде явных зависимостей, соответственно, $Q(x, \Delta^{(N)})$ и $I(\Delta^{(N)})$ от компонент Δ_i, $i = \overline{1, N}$, вектора $\Delta^{(N)}$, где для фактических вычислений неравномерно сходящихся на границах $x = x_0$ и $x = x_1$ бесконечных рядов вида (2) могут быть использованы известные эффективные способы улучшения их сходимости [5, 6, 8].

В результате осуществляется точная редукция исходной ЗОУ СРП к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [1, 4] на минимум функции $I(\Delta^{(N)})$ конечного числа *N* переменных Δ_i, $i = \overline{1, N}$,

$$I(\Delta^{(N)}) \to \min_{\Delta^{(N)}}; \tag{11}$$

с бесконечным числом ограничений, диктуемых требованием (6) для всех $x \in [x_0, x_1]$ и заменяемых одним условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| Q(x, \Delta^{(N)}) - Q^{**}(x) \right| \le \varepsilon . \tag{12}$$

Альтернансный метод в прикладных задачах полубесконечной оптимизации. Решение широкого круга ЗПО вида (11), (12) с учетом правила (10) относительно вектора $\Delta^{(N)}$, а также априори неизвестных величин минимакса в (9) при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$, $j \in \{\overline{1, \rho}\}$, может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернансным методом [1, 7].

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах вектора $\Delta^{(N_0)}$, являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышёвских приближений, и существенном использовании дополнительной информации об оптимальной форме пространственного распределения результирующего состояния $Q(x,\Delta^{(N_0)})$ управляемой СРП, диктуемой закономерностями предметной области в каждой конкретной рассматриваемой задаче. Согласно установленным в [7] альтернансным свойствам, одинаковые значения максимальных отклонений $\max\limits_{x\in[x_0,x_1]}\left|Q(x,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x)\right|$, равные допустимой величине ε в (6), достигаются в некоторых точках $x_j^0,\ j=\overline{1,R}$, на отрезке $[x_0,x_1]$, общее число R которых, как правило, оказывается равным числу всех искомых неизвестных в ЗПО (11), (12):

$$R=\begin{cases} N_0, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(N_0)}<\varepsilon<\varepsilon_{\min}^{(N_0-1)};\\ N_0+1, & \text{если } \varepsilon=\varepsilon_{\min}^{(N_0)}. \end{cases} \tag{13}$$

Последующая редукция данных равенств на основании дополнительных сведений о форме кривых $Q(x,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x)$ на $[x_0,x_1]$ к соответствующей системе уравнений относительно N_0 значений $\Delta_i^{(N_0)},\ i=\overline{1,N_0}$, при $\varepsilon_{\min}^{(N_0)}<\varepsilon<\varepsilon_{\min}^{(N_0-1)}$ или N_0+1 величин $\Delta_i^{(N_0)},\ i=\overline{1,N_0}$, и $\varepsilon_{\min}^{(N_0)}$ при $\varepsilon=\varepsilon_{\min}^{(N_0)}$ в (6), и дальнейшее ее решение известными численными методами исчерпывают решение исходной ЗОУ СРП.

Во многих прикладных задачах при выполнении некоторых дополнительных допущений точки x_j^0 образуют чебышёвский альтернанс [1, 7], и указанная система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} Q(x_j^0,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x_j^0)=\eta(-1)^j\varepsilon,\ \eta=\pm1,\ j=\overline{1,R};\\ x_0\le x_1^0<x_2^0<\ldots<x_{R-1}^0<x_R^0\le x_1, \end{gathered} \tag{14}$$

со знакочередующимися отклонениями $Q(x_j^0,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x_j^0)$, где несовпадающие с границами отрезка $[x_0,x_1]$ точки $x_{j_r}^0\in\{x_j^0\},\ r=\overline{1,R^*},\ R^*\le R$, экстремума разности $Q(x,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x)$ фигурируют в роли промежуточных переменных, для определения координат которых система (14) дополняется равенствами

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q(x_{j_r}^0,\Delta^{(N_0)})-Q^{**}(x_{j_r}^0))=0,\ r=\overline{1,R^*}. \tag{15}$$

Описанная схема решения ЗОУ СРП в рассматриваемой постановке распространяется на задачи со значительно более сложными, в том числе нелинейными и цифровыми моделями СРП с управляемыми функциями состояния, описывающими пространственно-временные характеристики взаимосвязанных процессов в физических полях различной природы [1, 4–7].

В работах [1, 4–7, 9, 10] предлагаемый метод используется для построения алгоритмов оптимального по ряду основных технико-экономических критериев программного управления применительно к широкому кругу нестационарных термодиффузионных процессов технологической теплофизики, в том числе в центральных задачах быстродействия и минимизации расхода энергии.

В частности, для представляющих самостоятельный интерес стратегий робастного управления СРП в типичных условиях интервальной неопределенности характеристик объекта, порождаемой всеми возможными реализациями вектора y параметризуемых неопределенных факторов в пределах известных границ заданных множеств их изменения $L_r \subset E^r$, $y \in L_r$, ЗОУ СРП опять сводится к виду (11), (12)

$$I(\Delta^{(N)}) \to \min_{\Delta^{(N)}}; \tag{16}$$

$$\max_{l \in \Omega} \left| Q(l, \Delta^{(N)}) - Q^{**}(x) \right| \le \varepsilon; \tag{17}$$

с ограничением (17), рассматриваемым на расширенном по сравнению с (12) множестве Ω элементов $l = (x, y)$; $\Omega = [x_0, x_1] \times L_r$, включающем, наряду с пространственной переменой x, все допустимые составляющие вектора y [10].

2. Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов в системах с распределенными параметрами. В настоящее время существуют различные подходы к решению отличающейся большой спецификой и сложностью центральной проблемы автоматической отработки оптимальных процессов в замкнутых системах управления объектами с распределенными параметрами. В этих целях для построения систем, близких к оптимальным по базовому критерию быстродействия, во многих случаях могут быть использованы простые релейные регуляторы с функциями переключения, синтезируемыми в форме линейных комбинаций обратных связей по выходу СРП в некоторых точках пространственной области его определения, число которых должно быть равно числу интервалов постоянства оптимальных сосредоточенных управляющих воздействий, а коэффициенты обратных связей определяются по результатам расчета программных управлений [1, 5].

Классический метод динамического программирования применяется для аналитического конструирования регуляторов, оптимальных по типовым квадратичным критериям качества в системах автоматической стабилизации программных траекторий СРП [1, 11]. Регулярные методы синтеза, базирующиеся на структурной теории распределенных систем, приводят к построению автономных контуров независимого регулирования отдельных гармоник разложения управляемой функции состояния в бесконечный, сходящийся в среднем ряд по собственным функциям модели объекта в задачах с распределенными управляющими воздействиями или к связанному регулированию модальных переменных при использовании граничных сосредоточенных управлений [12].

К аналогичным результатам приводит метод пространственно-частотной декомпозиции [3], основанный на спектральной теории разложения управляемой величины в бесконечные ряды по произвольной ортонормированной системе функций пространственных координат.

Новые эффективные пути построения замкнутых систем управления объектами с распределенными параметрами открывают конструктивный подход к проблеме синтеза регуляторов в сложных нелинейных системах автоматического управления, базирующийся на идее перехода к управлению агрегированными макропеременными, формируемыми в виде некоторых функций фазовых координат и искомых коэффициентов обратных связей [13].

В достаточно общем случае СРП описывается следующей бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений вида (7) в отклонениях $z_n = \bar{Q}_n - \bar{Q}_n^{**}$ от заданного состояния:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_n}{dt} = -\mu_n^2 z_n + f_n(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{s} b_{in} \upsilon_i(t), \;\; n = 1, 2, \ldots \\ &z_n(0) = z_n^0,\; b_{1n} \in \{\bar{g}_{1n}, d_{0n}, d_{1n}\} \;\textit{при}\; s = 1;\; b_{in} = \bar{g}_{in},\; i = \overline{1, s} \;\textit{при}\; s > 1 \end{aligned} \tag{18}$$

в большинстве практически реализуемых вариантов по характеру используемых сосредоточенных управляющих воздействий $\upsilon_i(t),\ i=\overline{1,s}$, подчиненных ограничениям

$$\upsilon_{i\min} \le \upsilon_i(t) \le \upsilon_{i\max};\ i=\overline{1,s};\ \upsilon_{i\min}, \upsilon_{i\max} = const, \qquad (19)$$

где $\upsilon_1(t) \in \{v_1, u_0, u_1\}$ при $s=1$; $\upsilon_i(t)=v_i(t)$ при $s>1$, и рассматривается типичный случай представления распределенного управления $u(x,t)$ в форме

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{s} g_i(x)v_i(t);\ \bar{u}_n(\mu_n,t)=\sum_{i=1}^{s}\bar{g}_{in}\,v_i(t);\ n=1,2,... \qquad (20)$$

с заданными значениями $\bar{g}_{in}$ мод разложения в ряды вида (2), (3) зависимостей $g_i(x)$ от пространственной координаты, изначально фиксируемых, исходя из требований технической реализации.

Система (18) при необходимости аппроксимируется с любой требуемой точностью достаточно большим, но конечным числом *N* ее первых уравнений при обычно выполняющихся в прикладных задачах усиленных условиях Коши-Липшица [3, 14]. Всюду далее на этом основании учитываются N_1 мод z_n, $n=\overline{1,N_1}$, где $N_1=\infty$ или $N_1=N<\infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления.

Дополним структуру объекта (18) малоинерционными интеграторами [13]

$$T_{0i}\frac{dz_{0i}}{dt}=\upsilon_{0i}(t),\ i=\overline{1,s},\ \ s\ge 1,\ T_{0i}=const \qquad (21)$$

с условными управлениями $\upsilon_{0i}(t)$ на их входах, полагая

$$\upsilon_i = L_{1i}+L_{2i}th(\eta_i z_{0i}),\ L_{1i}=\frac{\upsilon_{i\max}+\upsilon_{i\min}}{2};\ L_{2i}=\frac{\upsilon_{i\max}-\upsilon_{i\min}}{2} \qquad (22)$$

с целью учета ограничений (19) при всех $\eta_i = const > 0$.

В результате, согласно (18), (21), (22), получим описание СРП в расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{z}, z_0),\ z_0=(z_{0i}),\ i=\overline{1,s}$:

$$\begin{aligned} &T_{0i}\frac{dz_{0i}}{dt}=\upsilon_{0i}(t),\ i=\overline{1,s};\\ &\frac{dz_n}{dt}=-\mu_n^2 z_n+f_n(\mathbf{z})+\sum_{i=1}^{s} b_{in}(L_{1i}+L_{2i}th(\eta_i z_{0i})),\ n=1,2,... \end{aligned} \qquad (23)$$

В соответствии с предлагаемой в [13] методологией синтеза требуется найти алгоритмы управления с обратной связью $\upsilon_i(\mathbf{z}, z_0)$, обеспечивающие перевод объекта (23) из произвольного начального состояния сначала в окрестность пересечения параллельной совокупности притягивающих многообразий

$$\psi_i(\mathbf{z}, z_0)=0,\ i=\overline{1,s}, \qquad (24)$$

определяемых выбором агрегированных макропеременных ψ_i, а затем последующее асимптотически устойчивое движение вдоль этого пересечения к точке равновесия $\mathbf{z} = 0$ с требуемыми качественными показателями переходного процесса. Выбор траекторий движения макропеременных в виде решений системы дифференциальных уравнений

$$T_i \frac{d\psi_i}{dt} + R_i(\psi_i) = 0,\ i = \overline{1,s},\ T_i = const, \tag{25}$$

принадлежащих подсемейству устойчивых экстремалей, минимизирующих сопровождающий квадратичный функционал качества

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{s} \left[R_i^2(\psi_i) + T_i^2 \left(\frac{d\psi_i}{dt} \right)^2 \right] dt, \tag{26}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом этом движения относительно многообразия (24) при любых $T_i > 0$ для произвольных и дифференцируемых функций $R_i(\psi_i)$ в условиях $R_i(0) = 0;\ \psi_i R_i(\psi_i) > 0\ \forall \psi_i \neq 0,\ i = \overline{1,s}$ [13].

Выберем следующие нелинейные агрегированные макропеременные в (24) – (26), полагая $R_i(\psi_i) = \psi_i$, $i = \overline{1,s}$:

$$\psi_i(\mathbf{z}, z_0) = th\left[L_{1i} + L_{2i} th(\eta_i z_{0i}) + \sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n \right],\ i = \overline{1,s} \tag{27}$$

с априори неизвестными коэффициентами β_{in} обратных связей. Вычисляя здесь полные производные $\dfrac{d\psi_i(\mathbf{z}, z_0)}{dt}$, $i = \overline{1,s}$, на уравнениях модели объекта (23) и подставляя результаты дифференцирования в (25), получим основную систему функциональных уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{T_i}{ch^2 P_i} \left\{ \frac{L_{2i}\eta_i}{T_{0i} ch^2(\eta_i z_{0i})} \upsilon_{0i} + \sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} \left[-\mu_n^2 z_n + f_n(\mathbf{z}^{N_1}) + \sum_{j=1}^{s} b_{jn} (L_{1j} + L_{2j} th(\eta_j z_{0j})) \right] \right\} + \\ + th P_i = 0,\ \ P_i = (L_{1i} + L_{2i} th(\eta_i z_{0i})) + \sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n,\ \ i = \overline{1,s}, \end{gathered} \tag{28}$$

решение которой относительно условных управлений υ_{0i}, $i = \overline{1,s}$, полностью определяет с учетом (21), (22) искомую структуру регулятора $\upsilon_i(\mathbf{z}^{N_1}, z_0)$, $i = \overline{1,s}$, в рассматриваемой задаче синтеза с вектором $\mathbf{z}^{N_1} = (z_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, фазовых координат, вычисляемым при полном измерении состояния по правилам определения мод разложения $Q(x,t)$ в ряды по собственным функциям модели СРП.

Идеализированное представление о возможности полного и точного измерения распределенного выхода СРП обосновывается известной теоремой разделения, позволяющей отдельно рассматривать задачу построения наблюдателя состояния с требуемыми свойствами [11].

На достаточно большом удалении от притягивающих многообразий, где, согласно (27), (28), $P_i \neq 0;\ |\psi_i| = |thP_i| \approx 1;\ \dfrac{d\psi_i}{dt} \approx 0,\ i \in \{\overline{1,s}\}$, компоненты функционала (26) на соответствующих временных интервалах в условиях $R_i(\psi_i) = \psi_i$ практически превращаются в критерий быстродействия с выходом управлений

$\upsilon_i(t)$ на ограничения (19), отвечая типичным требованиям минимизации времени процесса перевода объекта в равновесное состояние.

При движении вдоль пересечения многообразий (24), где $P_i = 0,\ i = \overline{1,s}$ получаем при малых отклонениях от точки $\mathbf{z} = 0$, согласно (22), (24), (27), линейный закон управления

$$\upsilon_i(\mathbf{z}) = -\sum_{m=1}^{N_1} \beta_{im} z_m,\ i = \overline{1,s}. \tag{29}$$

В окрестности этих многообразий при малых P_i, где $thP_i \approx P_i$, функционал (26) принимает вид стандартного квадратичного критерия качества с управляющими воздействиями либо близкими к (29), либо принимающими предельно допустимые значения в (19).

В итоге с весьма малой погрешностью реализуется значительно более простой по сравнению с (28) алгоритм управления

$$\upsilon_i(\mathbf{z}) = \begin{cases} -\sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n,\ \upsilon_{i\min} \le -\sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n \le \upsilon_{i\max}; \\ \upsilon_{i\max},\quad -\sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n \ge \upsilon_{i\max}; \\ \upsilon_{i\min},\quad -\sum_{n=1}^{N_1} \beta_{in} z_n \le \upsilon_{i\min} \end{cases} \qquad i = \overline{1,s}. \tag{30}$$

с ограниченным выходным сигналом пропорциональных регуляторов (42).

Соответствующий выбор коэффициентов обратных связей β_{in} применительно к уравнениям первого приближения нелинейной модели (18) с регуляторами (29):

$$\frac{dz_n}{dt} = -\mu_n^2 z_n + \sum_{m=1}^{N_1} \left(\frac{\partial f_n(\mathbf{z}^{N_1})}{\partial z_m} \right) z_m - \sum_{i=1}^{s} b_{in} \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{im} z_m,\ n = \overline{1, N_1} \tag{31}$$

гарантирует любое заданное расположение корней характеристического полинома системы (31) с отрицательной вещественной частью при $N_1 = N < \infty$ [15] и следовательно, гарантирует, согласно критерию Ляпунова, асимптотическую устойчивость положения равновесия нелинейного объекта (31) с линейным законом управления (42) при $N_1 \le \infty$ [14, 15].

В простейшем частном варианте

$$\beta_{im} = K_i \varphi_m(\mu_m, x_{ic}),\ x_{ic} \in [x_0, x_1],\ i = \overline{1,s},\ m = \overline{1, N_1},\ N_1 = \infty \tag{32}$$

будем иметь в (29), согласно (2):

$$\upsilon_i(\mathbf{z}) = -K_i \sum_{m=1}^{\infty} z_m(t)\, \varphi_m(\mu_m, x_{ic}) = -K_i \left[Q(x_{ic}, t) - Q^{**}(x_{ic}) \right],\ i = \overline{1,s}. \tag{33}$$

В данном случае алгоритм управления (30) сводится, в соответствии с (33), к построению системы регулирования выхода объекта $Q(x_{ic}, t)$, $i = \overline{1,s}$, сосредоточенного в s точках $x_{ic} \in [x_0, x_1]$, если коэффициенты K_i передачи пропорциональных регуляторов обеспечивают требуемые показатели качества процессов управления. Во многих типичных ситуациях такой выбор K_i становится возможным [12].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. – Саратов: СГТУ, 1997. – 191 с.
4. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 3. – С. 22-33.
5. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 278 с.
6. *Rapoport E., Pleshivtseva Yu.* Optimal Control of Induction Heating Processes. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2007. – 348 p.
7. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
8. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
9. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное по быстродействию управление нелинейными объектами технологической теплофизики // Элементы и системы оптимальной идентификации и управления технологическими процессами: Сб. науч. трудов. – Тула: ТулГУ, 1996. – С. 81-91.
10. *Рапопорт Э.Я.* Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 3. – С. 86-96.
11. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 214 с.
12. *Рапопорт Э.Я.* Структурно-параметрический синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 4. – С. 47-60.
13. *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 343 с.
14. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974. – 415 с.
15. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.Н. Ефимов.

Рапопорт Эдгар Яковлевич
Самарский государственный технический университет.
E-mail: rapoport@samgtu.ru.
443110, г. Самара, а/я 4183.
Тел.: 88463370700.
Кафедра автоматики и управления в технических системах; д.т.н.; профессор.

Плешивцева Юлия Эдгаровна
E-mail: yulia_pl@mail.ru.
443100, г. Самара, ул. Самарская, 190, кв. 20;
Тел.: 88463324234.
Кафедра управления и системного анализа в теплоэнергетике; д.т.н.; профессор.

Rapoport Edgar Yakovlevich
Samara State Technical University.
E-mail: rapoport@samgtu.ru.
Box 4183; Samara, 443110, Russia.
Phone: +78463370700.
The Department of Automatics and Management in Technical Systems; Dr. of Eng. Sc.; Professor.

Pleshivtseva Yulia Edgarovna
E-mail: yulia_pl@mail.ru.
190-20, Samarskaya Street, Samara, 443100, Russia.
Phone: +78463324234.
The Department of management and the system analysis in power system; Dr. of Eng. Sc.; Professor.

УДК 681.5

А.Б. Чернышев, Ю.В. Ильюшин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается методика расчета шага дискретизации, однородного трехмерного объекта управления, исходя из заданной погрешности. Рассматривается влияние шага дискретизации на заданную погрешность. Получена функция начального нагрева и проведено математическое моделирование температурного процесса, проведен анализ полученных результатов. Сделан вывод об обобщении разработанного метода определения шага дискретизации на класс систем, для которых существует фундаментальное решение (функция Грина).

Температурное поле; управляющие воздействия; шаг дискретизации; функция Грина.

Y.V. Ilyushin, A.B. Chernyshev

THE DETERMINATION OF THE STEP TO SAMPLING FOR CALCULATION OF THE HEAT FIELD OF THE THREE-DIMENSIONAL OBJECT OF MANAGEMENT

It Is Considered methods of the calculation of the step to sampling, uniform three-dimensional object of management, coming from given to inaccuracy. It Is Considered influence of the step to sampling on given inaccuracy. It Is Received function of the initial heating and is organized mathematical modeling of the warm-up process, is organized analysis got result. Conclusion is Made about generalization of the designed method of the determination of the step to sampling on class of the systems, for which exists the fundamental decision (the function Grina).

Thermal field; controlling actions; discretization step; Green's function.

Рассмотрим пространственно трехмерный объект управления, который представляет собой объект, ограниченный пространственными координатами. Математическая модель такого объекта имеет вид [1]:

$$\frac{\partial Q(x,y,z,t)}{\partial t} - a^2\left[\frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right] = f(x,y,z,t);$$

$$Q(x,y,z,0) = Q_0(x,y,z);$$

$$Q(0,y,z,t) = q_1(y,z,t);\ Q(L_1,y,z,t) = q_2(y,z,t);\ Q(x,0,z,t) = q_3(y,z,t);$$

$$Q(x,L_2,z,t) = q_4(x,z,t);\ Q(x,y,0,t) = q_5(x,y,t);\ Q(x,y,L_3,t) = q_6(x,y,t).$$

$$0 \le x \le L_1;\ 0 \le y \le L_2;\ 0 \le z \le L_3;\ t \ge 0;\ a > 0;$$

Расчет показателей температуры будем вести по функции Грина, представленного в виде бесконечного ряда Фурье

$$G(x,y,z,\rho,\nu,\vartheta,t) = \frac{8}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3} \cdot \sum_{k,m,n=1}^{\infty} B_{k,m,n}(\cdot) \cdot \exp\left[-a^2\pi^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)\right];$$