УДК 519.859

Г.П. Виноградов

МОДЕЛИ ОЦЕНКИ УБЕЖДЕННОСТИ О АДЕКВАТНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НЕЧЕТКОГО ВЫБОРА*

Рассматривается проблема принятия решений, когда представления лица принимающего решения о ситуации выбора формируются в процессе построения ее модели. Для этого организуется сбор информации для «снятия» различного рода неопределенностей и формирования гипотетической модели ситуации выбора. Сбор информации прекращается после достижения у лица принимающего решения состояния убежденности в правильном понимании связей и отношений между объектами в предметной области. Предложены нечеткие меры для включения оценок этого состояния в модель выбора.

Нечеткое множество; принятия решений; нечеткие предпочтения; убежденность; модели нечеткого выбора

G.P. Vinogradov

MODEL EVALUATION BELIEFS ABOUT ADEQUATE REPRESENTATION AT FUZZY PROBLEM OF CHOICE

Addresses the problem of making the representations decision makers about the situation of choice formed in the process of constructing its model. To this end, organized collection of information for the "removal" of various kinds of uncertainties and the formation of a hypothetical model of a situation of choice. Collection of information is terminated after reaching a decision makers state conviction in a proper understanding of connections and relationships between objects in the domain. Proposed fuzzy measures to include assessments of the state in the model of choice.

Fuzzy set; decision making; fuzzy preference; conviction of a fuzzy model of choice.

Введение. При решении прикладных задач выбора лицо, принимающее решения (ЛПР), использует модель предметной области, отражающую его представления о ней. В ситуации неполной информации, знания или дефицита времени ЛПР строит модель предметной области, временно исходя из правдоподобных предпосылок, относительно которых у него нет достаточных доказательств. Комплекс таких предпосылок, идей, взглядов направлены на объяснение явлений, процессов и связей между ними в конкретной предметной области и они образуют гипотетическую концепцию ЛПР, которая понимается как предположительное, субъективное знание.

Предпосылка выступает в форме убеждения, которое в свою очередь является мерой степени уверенности в не полностью определенном предположении.

Выводы (заключения), которые делаются на основе гипотетической концепции (субъективной теории), определяют у ЛПР состояние убежденности, которое является мерой истинности предпосылок, гипотез, правила построения вывода (т.е. гипотетической концепции).

Если результат, полученный от реализации решения, сформированного на основе субъективных представлений ЛПР, не соответствует его ожиданиям, то он реализует немонотонный процесс пересмотра убеждений, который предполагает изъятие ошибочной предпосылки и/или введения новой предпосылки. Новые убеждения, таким образом, являются следствием новой информации, полученной как от системы вывода, так и от системы мониторинга решений.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-07-00373-а).

Для повышения степени убежденности в истинности предпосылок и уверенности в предполагаемых результатах ЛПР использует различные процедуры повышения своей информированности. В этой связи представляет интерес разработка математических моделей, учитывающих такое поведение ЛПР на основе теории нечетких систем и теории отношений [1].

1. Модель нечеткого выбора. Пусть имеется шкала X, которая может быть конечной или бесконечной. Предполагается, что на множестве X задано бинарное отношение $\succ$, обладающее свойствами асимметричности, транзитивности и слабой связности. Такое отношение называется отношением строгого предпочтения на множестве значений критерия. Известно, что слабая связность отношения $\succsim$ означает, что для любых двух элементов x_1 и $x_2 \in X$, $x_1 \succsim x_2$ выполняется либо соотношение $x_1 \succ x_2$, либо соотношение $x_2 \succ x_1$.

Пусть A – произвольное непустое множество на множестве X и $A \subseteq X$. Нечетким множеством A на множестве X называется совокупность пар

$$A = [\mu_A(x),\ x],$$

где $\mu_A : X \to [0,\ 1]$ – отображение множества X в единичный отрезок [0, 1], называемое функцией принадлежности нечеткого множества A [2].

Определение 1. Нечеткой функцией выбора называется отображение C, заданное на множестве всех непустых подмножеств $2^X \setminus \{\varnothing\}$, которое ставит в соответствие каждому $A \subset X$ определенное нечеткое множество $\Sigma(A)$ с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, обладающей свойствами:

$$\mu_A(x) \in [0,\ 1] \quad \forall x \in A \subset X,\ \ \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus A.$$

Будем считать, что возможна ситуация, когда для некоторых $x \in A \subset X$, $\mu_A(x) = 0\ \forall x \in X$. Это означает, что выбор из множества A является пустым, то есть $\Sigma(A) = \varnothing$. Другими словами, при предъявлении некоторых A имеет мест о отказ от выбора.

Согласно этому определению исход или выигрыш от выбора определяется нечетким подмножеством на множестве исходов O. Это позволяет использовать представления о ситуации выбора человека, на основе которых он устанавливает соответствия между альтернативами и исходом, используя нечеткие действительные числа.

Под нечетким числом понимается нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющих нормальную и выпуклую функцию принадлежности такую, что: 1) существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице; 2) при отступлении от единицы вправо или влево функция принадлежности не возрастает.

При сравнении исходов, представленных в виде нечетких действительных чисел, в соответствии с принципом обобщения Заде необходимо определить меры для выявления предпочтений при сравнении нечетких действительных чисел.

2. Оценки предпочтений на множестве нечетких действительных чисел. Формирование нечеткого предпочтения на базе использования операций отношения между нечеткими действительными числами состоит в выявлении следующих ситуаций предпочтения: 1) строгое предпочтение; 2) безразличие; 3) большая предпочтительность; 4) не сравнимость.

Из теории нечетких множеств известно, что подмножество элементов множества X, для которых $\mu(x) > 0$, называется носителем (суппортом) нечеткого множества $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ и обозначается *supp A*. Соответствующая формальная запись имеет вид:

$$supp\ A = \{x \in X;\ \mu_A(x) > 0\}.$$

Тогда для случая а) $supp\ A \cap supp\ B = \varnothing$, то есть носители обоих нечетких множеств не имеют общих элементов.

Для случая б) нечеткое множество B содержится в нечетком множестве

A ($A \subset B$) или $\mu_B(x) \le \mu_A(x)$, или $supp\ B \subset supp\ A$.

Случай б) предполагает две ситуации: 1) нечеткое множество A равно нечеткому множеству B; 2) нечеткое множество A почти равно нечеткому множеству B.

В первом случае $\mu_B(x) = \mu_A(x)$, а во втором – можно ввести понятие степени равенства нечетких множеств A и B, например, в виде:

$$E(A = B) = 1 - \max_{x \in T} \left|\mu_A(x) - \mu_B(x)\right|,$$

где $T = \{x \in X;\ \mu_A(x) \ne \mu_B(x)\}$.

Случай в) можно оценивать и с других позиций. Известно, что α-уровнем нечеткого множества $A \subseteq X$, обозначаемым, как A_α, называется четкое подмножество

$$A_\alpha = \{x \in X :\ \mu_A(x) \ge \alpha\},$$

то есть это подмножество определяется характеристической функцией

$$\psi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для}\ \ \mu_A(x) \ge \alpha \\ 0 & \text{для}\ \ \mu_A(x) < \alpha \end{cases}.$$

Определение. Пусть нечеткие множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$, где X – четкое множество. Пусть для каждого нечеткого множества определены множества α-уровня следующим образом

$$A_\alpha = \{x \in X :\ \mu_A(x) \ge \alpha\}$$

$$B_\alpha = \{x \in X :\ \mu_B(x) \ge \alpha\},$$

где $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ – функции принадлежности, значения которых выражают степень уверенности агента в принадлежности элемента x множествам A и B соответственно. Тогда альтернатива a будет предпочтительнее альтернативы b, тогда и только тогда, когда $x_a > x_b$, $\forall x_a \in A_\alpha(x)$, $x_b \in B_\alpha(x)$, т.е. A больше B на уровне α.

Обозначим через $\underline{\alpha}$ минимальное значение α, при котором выполняется неравенство $x_a > x_b$, $\forall x_a \in A_\alpha(x)$, $x_b \in B_\alpha(x)$. Тогда $1\text{-}\underline{\alpha}$ будет степенью уверенности либо в предпочтительности a относительно b, либо в безразличии при выборе a или b.

По аналогии, если A_α содержится в B_α, то есть $A_\alpha \subseteq B_\alpha$, то говорят, что A содержится в B на уровне α.

Так же, как и в предыдущем случае, можно ввести оценку степени уверенности 1-$\underline{\alpha}$, где $\underline{\alpha}$ – это минимальное значение α, при котором будет справедливым $A_\alpha(x) \subseteq B_\alpha(x)$, то можно говорить, что $A_\alpha(x) \subseteq B_\alpha(x)$ со степенью уверенности равной 1-$\underline{\alpha}$.

Величину 1-$\underline{\alpha}$ можно считать мерой убежденности ЛПР в предпочтительности одной альтернативы над другой. Если величина ρ=1-$\underline{\alpha}$ возрастает (или $\underline{\alpha}$ уменьшается) утверждение *A* больше *B* (или *A* содержится в *B*) становится более ясным. При $\underline{\alpha}$=0 любой элемент, принадлежащий нечеткому множеству, будет для ЛПР достоверно принадлежать только этому множеству.

3. Убежденность и информация. Понятие степени убежденности при выборе альтернативы используется в обеих моделях нечеткого выбора: классической и поведенческой. Легко видеть, что величина ρ=1-$\underline{\alpha}$ зависит от вида функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$. Чем меньше размах *supp A* и *supp B* (интервал от минимального до максимального значения), тем более четко выражены представления ЦА о ситуации выбора.

Введение меры степени убежденности при сравнении альтернатив позволяет определить:

1) степень достаточности информации для принятия решения. При значении степени уверенности ниже некоторого порога принятие решения откладывается для сбора дополнительной информации;

2) ценность для ЛПР собранной дополнительной информации. Она может быть равной нулю, если степень уверенности не изменится после ее получения. Если величина ρ =1-$\underline{\alpha}$ выросла, то информация способствовала росту степени представления ЛПР о ситуации выбора. Если $\rho_i(\underline{\alpha}_i) < \rho_{i-1}(\underline{\alpha}_{i-1})$, то либо имеет место дезинформация, либо полученные данные разрушают представление ЛПР о ситуации выбора и требуются новые данные.

Значение пороговой величины степени уверенности зависит от индивидуальных характеристик ЛПР: более осторожный человек потребует, чтобы степень уверенности была бы высокой; решительный, привыкший рисковать – менее высокой. Это позволяет сформулировать меру для количественной оценки типа ЛПР.

Величина $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1} > 0\ (< 0)$ позволяет определить направление поиска информации. Пусть имеются два высказывания $\rho \cong X$ есть *G* и $q \cong X$ есть *F*, где *F* и *G* – предикаты, представленные в виде нечетких множеств. Тогда, если $G \subset F$, ($p \Longrightarrow q$ (p влечет q). Это означает, что первое высказывание более информативно, чем второе. Таким образом, степень убежденности при сравнении объектов для ЛПР описывает оценку степени разделения множеств, характеризующих каждый объект. Степень убежденности при поступлении более ценной информации не должна уменьшиться по сравнению со степенью убежденности, сформированной на основе данных прошлого опыта.

Обозначим через *D* – дискриминационный эффект текущих представлений, тогда $\dfrac{dD_i}{dI_i} > 0$, т.е. дискриминационный эффект более ценной и достоверной информации для ЛПР не отрицателен.

Таким образом, более информативное высказывание – это высказывание с меньшей нечеткостью, мешающей разделению объектов. Следовательно, изменение информированности ЛПР приводит к изменению его представлений и как следствие к изменению $\mu_A(x)$ и *supp A*, и они могут быть использованы в качестве мер информированности ЛПР. Значит, в теории принятия решений для более четкого различения альтернатив между собой, нужно уменьшить нечеткость в оценке каждого исхода и выигрыша при применении альтернативы путем уменьшения нечеткости функции исхода и функции выигрыша (модели объекта и оценок результатов).

Достижение эффекта $G \subset F$ требует увеличение числа учитываемых при описании свойств. При этом каждый добавляемый признак должен увеличивать степень убежденности в различении объектов. Увеличение числа признаков может привести к двум ситуациям:

1. Новая информация увеличивает степень убежденности в $G \subset F$, то есть утверждение с новым признаком является более информативным, чем такое же утверждение, но без него.
2. Если сравниваются два объекта с одним и тем же количеством оцениваемых свойств, к которым добавляется еще одно свойство, но его значение у обоих объектов имеет трудно различимую величину, то добавочная информация не повышает степень убежденности в различимости объектов, но и не уменьшает ее.

Третий момент связан с использованием либо редуцированной информации, либо косвенной информации при принятии решения. В этом случае уменьшение информации не оказывает положительного влияния на степень уверенности в правильном разделении объектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – № 8. – P. 338-353.
2. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006.– 452 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Зотова–Заболеева.

Виноградов Геннадий Павлович
Тверской государственный университет.
E-mail: wgp272ng@mail.ru.
170024, г. Тверь, ул. Республиканская, 11, кв. 130.
Тел.: 84822449190; +79038008972.
Кафедра информатики и прикладной математики; профессор.

Vinogradov Gennady Pavlovich
Tver State Technical University.
E-mail: wgp272ng@mail.ru.
11, Republican Street, Apt. 130, Tver, 170024, Russia.
Phones: +74822449190; +79038008972.
The Department of Information and Applied Mathematics Science; Professor.