Гудкова Ольга Николаевна
E -mail: gudkova_o@ippm.ru.
Сектор автоматизации топологического проектирования; м.н.с.; аспирант.

Щелоков Альберт Николаевич
E-mail: schan@ippm.ru.
Тел.: 84997299845.
Заместитель директора.

Gavrilov Sergey Vitalievich
Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Science.
E-mail: sergey.v.gavrilov@ippm.ru.
3, Sovetskaya Street, Zelenograd, Moscow, 124681, Russia.
Phone: +74997299890.
The Department of Back-end Design Automation; Head the Department.

Gudkova Olga Nikolaevna
E-mail: gudkova_o@ippm.ru.
The Department of Back-end Design Automation; Junior Researcher; Post-graduate Student.

Schelokov Albert Nikolaevich
E-mail: schan@ippm.ru.
Phone: +74997299845.
Deputy Director.

УДК 681.51.01

Е.Н. Целигорова

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РОБАСТНОЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрены особенности использования символьных вычислений для повышения эффективности численных методов. Приведен алгоритм получения коэффициентов полинома в символьном виде для исследования абсолютной устойчивости нелинейной импульсной автоматической системы. Для исследования робастной абсолютной устойчивости этой системы предлагается получение интервальных значений коэффициентов полинома в символьном виде. Полученные результаты иллюстрируются примером.

Нелинейная импульсная автоматическая система; символьные вычисления; робастная абсолютная устойчивость; интервальные коэффициенты полинома.

E.N. Tseligorova

APPLICATION OF SYMBOLIC COMPUTATION IN THE STUDY OF ROBUST ABSOLUTE STABILITY NONLINEAR IMPULSE AUTOMATIC SYSTEMS

In the article the features of symbolic computation to improve the efficiency of numerical methods. The algorithm of obtaining the coefficients of the polynomial in the symbolic form for the study of absolute stability of nonlinear impulse automatic system. To study the robust absolute stability of this system is proposed to obtain interval values of the coefficients of the polynomial in symbolic form. The results are illustrated by example.

Nonlinear impulse automatic system; symbolic computation; robust absolute stability; interval coefficients of the polynomial.

Введение. Применяемые в настоящее время большинство математических пакетов, таких как MathCad, MatLab, Excel и ряд других позволяют выполнять численные вычисления с использованием логических и арифметических операций над массивами чисел. Полученный результат может быть оформлен как в виде таблицы, так и в графическом виде.

Полученные результаты является приближенным, что обусловлено производимыми операциями над вещественными числами, их округлением, связанным с ограничением разрядной сетки при хранении чисел. Накопленные в результате вычислений погрешности могут привести к расходимости или потере вычислительной устойчивости используемых методов, что приводит к получению неверных результатов [1–3].

Ряд ученых, такие как Петров Ю.П., Гайдук А.Р., Подчукаев В.А. и д.р., столкнувшись с такими явлениями, предлагают некоторые пути их решения. Например, для обеспечения достоверности полученных результатов должны учитываться контрпримеры, приведенные в [4,5]. Кроме того, необходимо проводить дополнительные проверки своих математических моделей, осуществляя проверки, предложенные в [4] или [6,7]. В тоже время имеется возможность свести к минимуму погрешность от накапливания ошибок, используя символьные преобразования.

Символьные вычисления позволяют значительно уменьшить вычислительные затраты и сделать применение методов вычислительной математики более эффективным.

С помощью символьных вычислений решается очень широкий спектр задач, требующих вычислений и аналитических выкладок. К ним относятся:

- разработка и анализ алгоритмов;
- математическое моделирование и компьютерный эксперимент;
- анализ и оработка данных;
- визуализация, научная и инженерная графика;
- разработка графических и расчетных приложений.

Символьная математика (компьютерная математика либо компьютерная алгебра) – большой раздел математического моделирования. Программы, применяемые в ней можно отнести к инженерным программам автоматизированного проектирования. При этом, в области инженерного проектирования выделяют три основных раздела:

- CAD – Computer Aided Design (Системы автоматизированного проектирования (САПР);
- CAM – Computer Aided Manufacturing (Подготовка технологического процесса производства изделий, ориентированная на использование ЭВМ);
- CAE – Computer Aided Engeneering (Программы или программные пакеты, предназначенные для инженерных расчётов, анализа и симуляции физических процессов).

Основными преимуществами применения средств компьютерной алгебры являются:

- повышение эффективности численных методов;
- высокая степень автоматизации решения задач;
- возможность создания дружелюбного интерфейса.

Символьные вычисления для исследования робастной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем (НИАС) используются пока еще недостаточно широко. Однако, за последнее время получен ряд результатов, которые позволяют проводить исследование как абсолютной, так и робастной абсолютной устойчивости НИАС, используя символьные вычисления.

Объект исследования. В качестве объекта будем рассматривать передаточную функцию непрерывной САУ, имеющую следующий вид:

$$W(s)=\frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$ – полином числителя передаточной функции степени n;

$B(s)$ – полином числителя передаточной функции степени m.

Методика исследования. Основные результаты.

1. Для исследования абсолютной устойчивости НИАС необходимо получить в символьном виде коэффициенты передаточной функции, которые затем используются в соответствующем критерии абсолютной устойчивости. Поскольку исследование абсолютной устойчивости НИАС, проводится с использованием w-преобразования, необходимо осуществить сначала z-преобразование ЛИЧ исследуемой системы, а затем получить коэффициенты передаточной функции с соответствующими коэффициентами в w-форме.

После соответствующих преобразований получим передаточную функцию дискретной системы, имеющую следующий вид:

$$W(w)=\frac{A(w)}{B(w)}.$$

Выберем для проверки следующий критерий [8]:

$$\operatorname{Re} W(j\nu)+\frac{1}{k}>0 \quad \forall \nu \in (0;\infty) \tag{1}$$

и осуществим соответствующий переход к псевдочастоте, производя подстановку w= $j\nu$.

В [9] критерий (1) преобразован к следующему полиномиальному выражению:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i,k=0}^{i+k=2l}(\xi_{il}b_i b_k)\nu^{2(n-l)}+k\sum_{l=0}^{n}\sum_{i,k=0}^{i+k=2l}(\xi_{il}a_i b_k)\nu^{2(n-l)}=0. \tag{2}$$

Из (2) видим, что коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции (1), непосредственно входят в критерий абсолютной устойчивости (2), что позволяет избежать промежуточных вычислений и накопление погрешностей вычислений.

2. Для исследования робастной абсолютной устойчивости НИАС следует исследовать полученный вещественный интервальный полином вида

$$P(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i s^i,\ a_i\in[\underline{a_i},\overline{a_i}],\underline{a_i}\le\overline{a_i}\ , \tag{3}$$

При исследовании интервальных полиномов принято ссылаться на слабую и сильную теоремы Харитонова [10].

<u>Слабая теорема Харитонова</u>. Необходимым и достаточным условием робастно устойчивости полиномов (3) является гурвицевость всех угловых полиномов у которых $a_i=\underline{a_i}$ либо $a_i=\overline{a_i}\ \ \forall i$. Всего из (3) можно сформировать 2^{n+1} угловых полиномов.

<u>Сильная теорема Харитонова</u>. Необходимым и достаточным условием семейства полиномов (3) является гурвицевость следующих четырех полиномов:

$$P_1(s)=\underline{a_0}+\overline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\underline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\ldots$$
$$P_2(s)=\underline{a_0}+\underline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\ldots$$
$$P_3(s)=\overline{a_0}+\overline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\underline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\ldots$$
$$P_4(s)=\overline{a_0}+\underline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\ldots$$

Таким образом, в общем виде, исследование робастной устойчивости двумерной НИАС может быть сведено к проверке следующего аналитического выражения [11]:

$$P_i(x)=A_i(x)+hB_j(x),\quad i=1,\ldots,4,\quad j=i+1,\ldots,4,$$

где h – варьируемый параметр, изменяющийся от 0 до ∞.

$$A_i(x)=(a_0+\Delta a_0)+(a_1+\Delta a_1)x+\ldots+(a_n+\Delta a_n)x^n,$$
$$B_j(x)=(b_0+\Delta b_0)+(b_1+\Delta b_1)x+\ldots+(b_n+\Delta b_n)x^n$$

где a, b_i – номинальные значения коэффициентов; $\Delta a_i, \Delta b_i$ – вариации, имеющие ограничения $-\alpha_i \le \Delta a_i \le \alpha_i; -\beta_i \le \Delta b_i \le \beta_i$.

Известна теорема [12], в которой утверждается, что система является робастно абсолютно устойчивой, если выполняется следующий критерий

$$\mathrm{Re}W(j\omega)+k^{-1}>0, \forall W \in \Gamma_k,$$

где Γ_k – множество передаточных функций, составленных из полиномов Харитонова. Проверка данного критерия предусматривает получение из передаточной функции разомкнутой системы с интервальными коэффициентами 16 передаточных функций, полиномы числителей и знаменателей которых являются полиномами Харитонова.

Таким образом, задача исследования абсолютной устойчивости входит как основа для исследования робастной абсолютной устойчивости НИАС и для её решения требуется выполнить определенный алгоритм, состоящий из следующих этапов:

1. В символьном виде осуществить получение коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции непрерывного объекта управления в s-форме.
2. Соответствующими преобразованиями осуществить переход от передаточной функции в s-форме к передаточной функции в z-форме, применяя, например, формулу Тастина, используя подстановку $z=e^{Ts}$.
3. Осуществить переход к передаточной функции в w-форме, используя подстановку z=(1+w)/(1-w).
4. Разложить передаточную функцию на действительную и мнимую части, используя подстановку w= $j\nu$.
5. Выбрать требуемый критерий абсолютной устойчивости НИАС.
6. Получить соответствующими преобразованиями полиномиальное уравнение вида $B(\nu^2)+kA(\nu^2)=0$.
7. Заменить переменную ν^2=x, получая следующее полиномиальное уравнение B(x)+kA(x)=0.

8. Определить минимальные и максимальные значения коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции, используя числовые значения параметров объекта управления для получения интервальных значений коэффициентов.
9. Провести исследование полученного полиномиального уравнения с численными значениями интервальных коэффициентов, используя, например, модифицированный метод корневого годографа.

Пример. В качестве примера рассмотрим этапы исследования абсолютной устойчивости нелинейной импульсной автоматической системы с получением коэффициентов передаточной функции, которые затем используются в соответствующем критерии абсолютной устойчивости. По приведенному выше алгоритму получим полиномиальное уравнение с символьными значениями интервальных коэффициентов.

Рассмотрим автоматическую систему, которая описывается передаточной функцией вида [13]:

$$G_0(s) = K_0[s(T_{дв}s+1)(T_г+1)]^{-1},$$

где $T_{дв}$ – постоянная времени двигателя; $T_г$ – постоянная времени генератора;

K_0 – коэффициент передачи $K_0 = K_{дв}K_{ред}K_гK_{см}K_{упч}$.

Фильтр нижних частот описывается передаточной функцией вида:

$$G_ф = K_{чд}(T_ф s+1)^{-1},$$

где $K_{чд}$ – коэффициент преобразования дискриминатора; $T_ф$ – постоянная времени фильтра.

Нелинейность $F(\omega)$ имеет характеристику типа “ограничение”.

Используя параметры объекта управления можно в аналитическом виде получить передаточную функцию ЛИЧ системы в w-форме, которая записывается в следующем виде

$$W(w) = \frac{A(w)}{B(w)} = \frac{a_0^{'}w^4 + a_1^{'}w^3 + a_2^{'}w^2 + a_3^{'}w + a_4^{'}}{b_0^{'}w^4 + b_1^{'}w^3 + b_2^{'}w^2 + b_3^{'}w + b_4^{'}},$$

где

$$a_0^{'} = a_0 - a_1 + a_2 + a_3;\; a_1^{'} = 4a_0 - 2a_1 - 4a_3;\; a_2^{'} = 6a_0 - 2a_2 - 6a_3;$$

$$a_3^{'} = 4a_0 + 2a_1 - 2a_3;\; a_4^{'} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3;$$

$$a_0 = 2T_{дв}^3 - 2T_{дв}^2 + 2T_г^3 + T_{дв}T_г^2 + T_г^2T_{дв};$$

$$a_1 = 2T_{дв}^2T_г^2 - T_{дв}^3T_г - T_{дв}T_г^3 - T_{дв}^2T_г(p-1) + T_{дв}^3(p-1) +$$
$$+T_г^3(m-1) + T_{дв}T_г^2(2p+m+3);$$

$$a_2 = (T_{дв}^3T + T_{дв}T_г^3 - 2T_{дв}^2T_г^2)(p+m) - T_{дв}^2T_г(p+m+pm+1) +$$
$$+T_{дв}^3(p-m+pm-1) + T_г^3(-p+m+pm-1) + T_{дв}T_г^2(3p+m+pm+1);$$

$$a_3 = 2T_{дв}^2T_г^2 - T_{дв}^3T_г - T_{дв}T_г^3 + (T_{дв}^2T_г - T_{дв}^3 - T_г^3 - T_{дв}T_г^2)pm +$$
$$+(T_{дв}^3 - T_{дв}^2T_г)m + (T_г^2 - T_г^2T_{дв})p;$$

$$b_0' = b_0^z - b_1^z + b_2^z - b_3^z;\ b_1' = 4b_0^z - 2b_1^z - 4b_3^z;\ b_2' = 6b_0^z - 2b_2^z - 6b_3^z;$$

$$b_3' = 4b_0^z + 2b_1^z - 2b_3^z;\ \ b_4' = b_0^z + b_1^z + b_2^z + b_3^z;$$

$$b_0^z = b_0; b_1^z = (b_1 - b_0 q); b_2^z = (b_2 - b_1 q); b_3^z = (b_3 - b_2 q); b_4^z = b_3 q;$$

$$b_0 = 2T_{\text{г}} T_{\text{дв}} - T_{\text{дв}}^2 - T_{\text{г}}^2; b_1 = T_{\text{дв}}^2(1.+p+m) + T_{\text{г}}^2(1+p+m) -$$

$$-2T_{\text{дв}} T_{\text{г}}(1+p+m);$$

$$b_2 = T_{\text{дв}}^2(pm-p-m) - T_{\text{г}}^2(p+m+pm) + 2T_{\text{дв}} T_{\text{г}}(a+b);$$

$$b_4 = (T_{\text{и}}^2 - T_{ld}^2)pm;$$

$$p = e^{-T_0/T_{\text{дв}}}; m = e^{-T_0/T_{\text{г}}}; q = e^{-T_0/T_{\text{ф}}};$$

Осуществим разложения передаточной функции на действительную и мнимую части для чего проведем замену $w = j\nu$. В результате чего передаточную функцию можно представить в следующем виде

$$W(w) = \frac{P(\nu) + jQ(\nu)}{M(\nu)},$$

где

$$P(\nu) = a_0' b_0' \nu^8 + (a_1' b_1' - a_0' b_2' - a_2' b_0')\nu^6 +$$

$$+(a_2' b_2' + a_1' b_3' - a_0' b_4' - a_4' b_0' + a_3' b_1')\nu^4 + (a_3' b_3' - a_2' b_4' - a_4' b_2')\nu^2 + a_4' b_4';$$

$$Q(\nu) = (a_0' b_1' - a_1' b_0')\nu^7 + (-a_0' b_3' + a_1' b_2' + a_2' b_1' + a_3' b_0')\nu^5 +$$

$$+(a_2' b_3' - a_3' b_2' - a_4' b_1' - a_1' b_4')\nu^3 + (a_3' b_4' - a_4' b_3')\nu;$$

$$M(\nu) = b_0'^2 \nu^8 + (b_1'^2 - 2b_0' b_2')\nu^6 + (b_2'^2 - 2b_3' b_1' + 2b_4' b_0')\nu^4 +$$

$$+(b_3'^2 - 2b_2' b_4')\nu^2 + b_4'^2;$$

Выбирая для проверки следующий критерий,

$$\operatorname{Re} W(j\nu) + \frac{1}{k} > 0 \quad \forall \nu \in (0;\infty),$$

заменяя $\nu^2 = x$, получим полиномиальное уравнение с символьными значениями интервальных коэффициентов

$$b_0'^2 x^4 + (b_1'^2 - 2b_0' b_2')x^3 + (b_2'^2 - 2b_3' b_1' + 2b_4' b_0')x^2 + (b_3'^2 - 2b_2' b_4')x +$$

$$+b_4'^2 + k[a_0' b_0' x^4 + (a_1' b_1' - a_0' b_2' - a_2' b_0')x^3 +$$

$$+(a_2' b_2' + a_1' b_3' - a_0' b_4' - a_4' b_0' + a_3' b_1')x^2 + (a_3' b_3' - a_2' b_4' - a_4' b_2')x + a_4' b_4'] = 0.$$

Полученное полиномиальное уравнение может быть использовано для проверки, как абсолютной устойчивости исследуемой системы, так и для проверки робастной абсолютной устойчивости этой системы.

Заключение. Таким образом, предложенный алгоритм позволяет получить в символьном виде полиномиальные уравнения, обеспечивая повышение эффективности численных методов вычисления при исследовании робастной абсолютной устойчивости нелинейных систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петров Ю.П.* О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия вузов. Электромеханика. – 1991. – № 11. – С. 106-109.
2. *Петров Ю.П.* Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 11. – С. 186-189.
3. *Данилевич Я.Б., Петров Ю.П.* О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей // Доклады Академии наук. – 2000. – Т. 371, № 4. – С. 473-475.
4. *Петров Ю.П. Петров Л.Ю*. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. – СПб.: Изд-во СПбГУ. – 1-е изд., 1999. – 108 с.; – 3-е изд., 2002. – 141 с.
5. *Петров Ю.П.* Новые главы теории управления. – СПбГУ, 2000. – 156 с.
6. *Гайдук А.Р.* К исследованию устойчивости линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 3. – С. 153-160.
7. *Подчукаев В.А.* К проблеме грубости // Сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов". – Саратов, 1997. – С. 205-223.
8. *Целигорова Е.Н.* Методика применения модифицированного метода корневого годографа для исследования робастной абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем // Известия ТРТУ. – 2008. – № 9. – С. 191-193.
9. *Целигоров Н.А., Целигорова Е.Н.* Применение модифицированного метода корневого годографа для исследования робастной абсолютной устойчивости многомерных систем управления // «Идентификация систем и задачи управления». Труды VI Международной конференции SICPRO '07. 29 января – 1 февраля 2007 г. Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН – CD-ROM, № 13034.
10. *Харитонов В.Л.* Устойчивость вложенных семейств полиномов // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 1. – С. 169-178.
11. *Целигорова Е.Н., Чернышев Ю.О.* Особенности применения метода корневого годографа для анализа многомерных НИАС // Труды Международной научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'06) и «Интеллектуальные САПР» (CAD 2006). – М.: Физматлит, 2008. – Т. 2. – С. 541-543.
12. *Тянь Юйпин*. Анализ и синтез робастных динамических систем со структурными линейными и нелинейными неопределенностями: Автореф. дисс. … д-ра тех. наук. – Таганрог: ТРТУ, 1996.
13. *Целигорова Е.Н.* Методика получения коэффициентов передаточных функций интервальных систем // Труды Международной научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'08) и «Интеллектуальные САПР» (CAD 2008). – М.: Физматлит. – 2008. – Т. 2. – С. 362-365.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Ю.О. Чернышев.

Целигорова Елена Николаевна
Донской государственный технический университет.
E-mail: celelena@yandex.ru.
344023, г. Ростов н/Д, ул. Страна Советов, 1.
Тел.: 88632589136.
Кафедра вычислительных систем и информационной безопасности; аспирант.

Tseligorova Elena Nikolaevna
Don State Technical University.
E-mail: celelena@yandex.ru.
1, Country Council Street, Rostov on Don, 344023, Russia.
Phone: +78632589136.
Department of Computational Systems and Information Security; Post-graduate Student.