

УДК 519.63:532.55

А.И. Сухинов, Л.В. Герасименко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПЛАНКТОННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ СО СТИМУЛИРОВАНИЕМ РАЗМНОЖЕНИЯ ЗА СЧЕТ ВНУТРЕННЕЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Целью данной работы является исследование внутренней люминесценции планктонных клеток как одной из возможных причин устойчивой неравномерности распределения фитопланктона по водоему («пятнистости»). В ходе исследования разработана непрерывная математическая модель динамики планктонных популяций со стимулированием размножения за счет внутренней люминесценции. Получены достаточные условия единственности решения. Выполнен ряд численных экспериментов, построены графики распределения концентрации фитопланктона для различных начальных условий. Анализ результатов показал, что данная модель описывает реальные процессы в водоемах.

Фитопланктон; люминесценция; «пятнистость» распределения; сферическая симметрия.

A.I. Sukhinov, L.V. Gerasimenko

DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL OF PLANKTONIC POPULATIONS WITH THE STIMULATION OF REPRODUCTION AT THE EXPENSE OF THE INTERNAL LUMINESCENCE

The purpose of this work is research of an internal luminescence of planktonic cells as one of the possible reasons of steady irregularity of distribution of a phytoplankton on a reservoir («punctuation»). During research the continuous dynamic mathematical model of planktonic populations with the stimulation of reproduction at the expense of the internal luminescence is developed. Sufficient conditions of uniqueness of the decision of a problem are received. A number of numerical experiments are executed; schedules of distribution of concentration of a phytoplankton for various entry conditions are constructed. The analysis of results has shown that the given model describes real processes in reservoirs.

Phytoplankton; luminescence; a «punctuation» of distribution; spherical symmetry.

Возможными причинами «пятнистости» водоемов (устойчивой неравномерности распределения фитопланктона по водоему) могут быть:

- ◆ выделение в процессе жизнедеятельности фитопланктонной популяции биологически активного метаболита, концентрация которого влияет на скорость роста особей;
- ◆ движение зоопланктона, являющегося хищником по отношению к фитопланктону, в направлении градиента пищи;
- ◆ стимулирование размножения фитопланктона за счет внутренней люминесценции.

В данной работе рассматривается простая математическая модель, объясняющая «пятнистость» за счет влияния внутренней люминесценции.

Пусть r_0 – эффективный радиус одной планктонной клетки.

Определим вначале, сколько световой энергии (мощности) получает одна клетка от любой другой (одной) клетки, расположенной на расстоянии R от данной клетки, где $R > r_0$ (рис. 1).

Пусть I_0 – яркость (интенсивность свечения единичной площади поверхности клетки). Излучаемая одной клеткой мощность равна

$$W_0 = 4\pi r_0^2 I_0,$$

где $4\pi r_0^2 = S$ – площадь поверхности одной клетки.

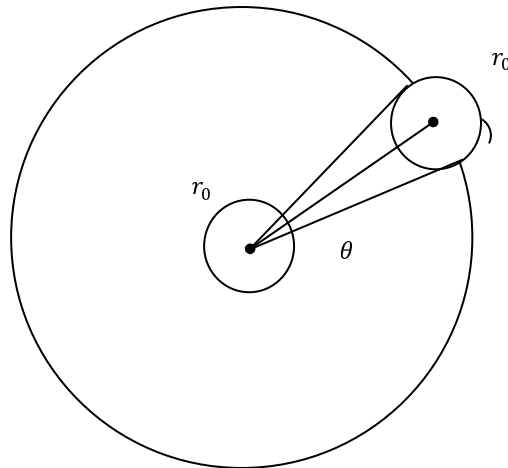


Рис. 1. Две планктонные клетки, расположенные на расстоянии R друг от друга

Мощность, попадающая на поверхность клетки, находящейся в точке А:

$$W = W_0 \frac{\theta}{4\pi} = \frac{\pi r_0^2}{4\pi R^2} 4\pi r_0^2 I_0 = \frac{\pi r_0^4}{R^2} I_0,$$

где $\theta = \frac{\pi r_0^2}{R^2}$ – телесный угол, под которым видна клетка, находящаяся в точке А,

из точки О (здесь из-за неравенства $R \gg r_0$ приняли $(R - r_0)^2 \approx R^2$). Итак,

$$W = \frac{\pi r_0^4}{R^2} I_0. \tag{1}$$

Пусть X – концентрация клеток планктона – масса клеток планктона в единице объема, т.е. $[X] = 1 \frac{\text{МГ}}{\text{М}^3}$. Удобнее работать с n_x – числом клеток в единице объема:

$$X = n_x \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_x, \tag{2}$$

где ρ_x – плотность вещества планктонных клеток, $\frac{4}{3} \pi r_0^3 = V$ – объем клетки, а

$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_x$ – масса одной клетки.

Определим мощность излучения всех планктонных клеток, находящихся в «тонком» сферическом слое радиусом R и толщиной dr . Очевидно, с учетом (1):

$$W_{dr} = W \cdot 4\pi R^2 \cdot dr \cdot n_x = \frac{\pi r_0^4}{R^2} I_0 \cdot 4\pi R^2 \cdot dr \cdot n_x = 4\pi^2 r_0^4 I_0 \cdot dr \cdot n_x,$$

где $4\pi R^2$ – площадь «тонкого» сферического слоя, $4\pi R^2 \cdot dr$ – объем слоя, $4\pi R^2 \cdot dr \cdot n_x$ – число планктонных клеток в этом слое;

$$W_{dr} = W'_{dr} \cdot dr,$$

т.е.

$$W_{dr} = 4\pi^2 r_0^4 I_0 dr \cdot n_x. \quad (3)$$

Учтем теперь ослабление мощности излучения, обусловленное рассеиванием и поглощением излучения за счет планктонных клеток, а также взвешенных частиц (мути).

Рассмотрим ослабление излучения от сферического слоя толщиной dr при прохождении dR (рис. 2):

$$dW_{dr} = -W_{dr} (\gamma_1 n_x \pi r_0^2 + \gamma_2 n_V \pi r_V^2) 4\pi R^2 dR,$$

где γ_1 , n_x , r_0 – параметры планктонных клеток; γ_2 , n_V , r_V – параметры взвеси;

$4\pi R^2 dR$ – объем сферического слоя толщиной dR ;

$\gamma_1 n_x \pi r_0^2$ – суммарная площадь поверхности клеток планктона в единице объема;

$\gamma_2 n_V \pi r_V^2$ – суммарная площадь поверхности взвеси в единице объема;

$(\gamma_1 n_x \pi r_0^2 + \gamma_2 n_V \pi r_V^2) \cdot 4\pi R^2 dR$ – суммарная площадь поверхности клеток планктона и взвеси в объеме сферического слоя толщиной dR .

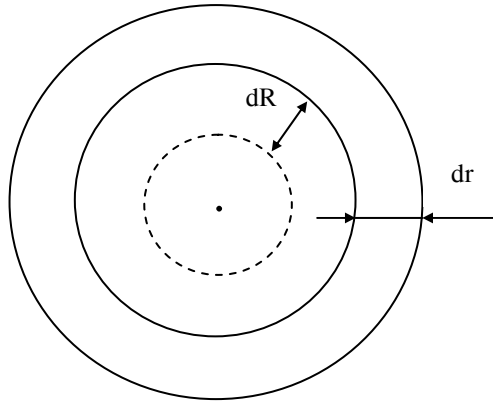


Рис. 2. Расположение сферических слоев dR и dr вокруг планктонной клетки

Откуда

$$\int \frac{dW_{dr}}{W_{dr}} = - \int_{R_1}^{R_2} (\gamma_1 n_x r_0^2 + \gamma_2 n_V r_V^2) 4\pi^2 R^2 dR.$$

На произвольном расстоянии l ослабление определится ($R_2 - R_1 \equiv l$, $R_2 \equiv R$):

$$\ln W_{dr} = - \int_{R_1}^{R_2} (\gamma_1 n_x r_0^2 + \gamma_2 n_v r_v^2) 4\pi^2 R^2 dR. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$W_{dr}(r_0) = W'_{dr}(R) \exp \left(- \int_{r_0}^R (\gamma_1 n_x r_0^2 + \gamma_2 n_v r_v^2) 4\pi^2 r^2 dr \right). \quad (5)$$

Остается просуммировать излучения от отдельных бесконечно тонких слоев по радиусу-вектору от r_0 до R_{\max} , где R_{\max} – некоторое эффективное расстояние, определяющее «предельное» расстояние, на котором клетки способны оказывать друг на друга воздействие посредством излучения.

Для этого необходимо проинтегрировать (5) по dR от r_0 до R_{\max} :

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{R_{\max}} W'_{dr}(R) \exp \left(- \int_{r_0}^R (\gamma_1 n_x r_0^2 + \gamma_2 n_v r_v^2) 4\pi^2 r^2 dr \right) dR = \\ &= \int_{r_0}^{R_{\max}} 4\pi^2 r_0^4 I_0 n_x \cdot \exp \left(- \int_{r_0}^R (\gamma_1 n_x r_0^2 + \gamma_2 n_v r_v^2) 4\pi^2 r^2 dr \right) dR. \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношении (6) перейдем к массовым концентрациям X и V , учитывая, что

$$n_x = \frac{3X}{4\pi r_0^3 \rho_x}, \quad n_v = \frac{3V}{4\pi r_v^3 \rho_v}$$

(следует из (2)).

Получим

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{R_{\max}} 4\pi^2 r_0^4 I_0 \frac{3X}{4\pi r_0^3 \rho_x} \cdot \exp \left(- \int_{r_0}^R \left(\gamma_1 \frac{3X}{4\pi r_0^3 \rho_x} r_0^2 + \gamma_2 \frac{3V}{4\pi r_v^3 \rho_v} r_v^2 \right) 4\pi^2 r^2 dr \right) dR = \\ &= \int_{r_0}^{R_{\max}} \frac{3X \pi r_0 I_0}{\rho_x} \cdot \exp \left(- \int_{r_0}^R \left(\gamma_1 \frac{3X}{r_0 \rho_x} + \gamma_2 \frac{3V}{r_v \rho_v} \right) \pi r^2 dr \right) dR. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений в случае сферической симметрии, которую мы в начале для простоты предполагаем:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}X) = \mu_x \Delta_r X + k_1 XS - \alpha X, \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}S) = \mu_s \Delta_r S - k_2 XS + \beta(S' - S) + f(r, t). \quad (9)$$

Здесь: X, S – концентрации фитопланктона и биогенного вещества (азот, фосфор) соответственно;

$\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор скоростей водного потока;

Δ_r – оператор Лапласа;

μ_X, μ_S – диффузионные коэффициенты для фитопланктона и биогенного вещества;

k_1 – удельная скорость роста фитопланктона;

k_2 – удельная скорость потребления биогенного вещества;

α – удельная смертность фитопланктона;

β – удельная скорость распада биогенного вещества;

S' – предельно возможная концентрация загрязняющего вещества;

$f = f(r, t)$ – функция источника загрязнения;

$$\Delta_r X = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right);$$

$$\Delta_r S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right);$$

$$\operatorname{div}(\vec{U}X) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r X r^2);$$

$$\operatorname{div}(\vec{U}S) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r S r^2).$$

Тогда (8) и (9) запишутся в виде

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r X r^2) = \mu_X \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + k_1 X S - \alpha X, \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r S r^2) = \mu_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) - k_2 X S + \beta (S' - S) + f(r, t). \quad (9)$$

Теперь подключаем основную гипотезу ($k_{10} = \text{const}$):

$$k_1 \equiv k_{10} + \gamma_0 \cdot W(r, t) =$$

$$= k_{10} + \frac{\gamma_0}{\rho_X} \int_{r_0}^{R_{\max}} 3X \pi r_0 I_0 \cdot \exp \left(- \int_{r_0}^R \left(\gamma_1 \frac{3X}{r_0 \rho_X} + \gamma_2 \frac{3V}{r_V \rho_V} \right) \pi r^2 dr \right) dR. \quad (10)$$

Преобразуем (10) при некоторых упрощающих предположениях. Будем считать, что концентрация X несущественно меняется при изменении расстояния от r_0 до R_{\max} и концентрация взвеси $V \equiv 0$. Это предположение поможет понять характер нелинейности в уравнениях (8) и (9). Тогда

$$\begin{aligned}
k_1 &= k_{10} + \frac{3\gamma_0 X \pi r_0 I_0}{\rho_X} \int_{r_0}^{R_{\max}} \exp\left(-\int_{r_0}^R \frac{3X \pi r^2}{r_0 \rho_X} dr\right) dR = \\
&= k_{10} + \frac{3\gamma_0 X \pi r_0 I_0}{\rho_X} \int_{r_0}^{R_{\max}} \exp\left(-\frac{\pi X \gamma_1 (R^3 - r_0^3)}{r_0 \rho_X}\right) dR = \\
&= k_{10} + \frac{3\gamma_0 X \pi r_0 I_0}{\rho_X} \cdot \exp\left(\frac{\pi \gamma_1 r_0^2}{\rho_X} X\right) \int_{r_0}^{R_{\max}} \exp\left(-\frac{\pi \gamma_1}{r_0 \rho_X} X R^3\right) dR. \quad (11)
\end{aligned}$$

Обозначим $\frac{\pi \gamma_1}{r_0 \rho_X} X = k$. Тогда последний интеграл можно представить в

виде

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^{R_{\max}} \exp(-kR^3) dR &= \left| \begin{array}{l} \text{Интегрирование по частям:} \\ u = \exp(-kR^3); du = -3kR^2 \exp(-kR^3); dV = dR; V = R \end{array} \right| = \\
&= R \cdot \exp(-kR^3) + \int_{r_0}^{R_{\max}} 3kR^3 \exp(-kR^3) dR = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Интегрирование по частям:} \\ u = \exp(-kR^3); du = -3kR^2 \exp(-kR^3); dV = 3kR^3 dR; V = \frac{3}{4} kR^4 \end{array} \right| = \\
&= R \cdot \exp(-kR^3) + \frac{3}{4} kR^4 \cdot \exp(-kR^3) + \int_{r_0}^{R_{\max}} \frac{9}{4} k^2 R^6 \exp(-kR^3) dR = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Интегрирование по частям:} \\ u = \exp(-kR^3); du = -3kR^2 \exp(-kR^3); dV = \frac{9}{4} k^2 R^6 dR; V = \frac{9}{4 \cdot 7} k^2 R^7 \end{array} \right| = \\
&= R \cdot \exp(-kR^3) + \frac{3}{4} kR^4 \cdot \exp(-kR^3) + \frac{9}{4 \cdot 7} k^2 R^7 \cdot \exp(-kR^3) + \\
&\quad + \int_{r_0}^{R_{\max}} \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 7} k^3 R^9 \exp(-kR^3) dR = \dots = \\
&= R \cdot \exp(-kR^3) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3kR^3)^i}{1(1+1 \cdot 3)(1+2 \cdot 3) \dots (1+i \cdot 3)} \Bigg|_{r_0}^{R_{\max}} = \\
&= \exp(-kR^3) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{1(1+1 \cdot 3)(1+2 \cdot 3) \dots (1+i \cdot 3)} k^i R^{(1+i \cdot 3)} \Bigg|_{r_0}^{R_{\max}}.
\end{aligned}$$

В результате удельная скорость роста фитопланктона принимает вид

$$k_1 = k_{10} + \frac{3\gamma_0 X \pi r_0 I_0}{\rho_X} \cdot \exp\left(\frac{\pi\gamma_1 r_0^2}{\rho_X} X\right) \times$$

$$\times \left[R \cdot \exp(-kR^3) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3kR^3)^i}{1(1+1 \cdot 3)(1+2 \cdot 3)\dots(1+i \cdot 3)} \right]_{r_0}^{R_{\max}} =$$

$$= k_{10} + \frac{3\gamma_0 X \pi r_0 I_0}{\rho_X} \exp\left(\frac{\pi\gamma_1 r_0^2}{\rho_X} X\right) \times$$

$$\times (R_{\max} - r_0) \exp\left[-\frac{\pi\gamma_1}{r_0 \rho_X} X (R_{\max}^3 - r_0^3)\right] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{3\pi\gamma_1}{r_0 \rho_X} X (R_{\max}^3 - r_0^3)\right]^i}{1(1+1 \cdot 3)(1+2 \cdot 3)\dots(1+i \cdot 3)}.$$

Причем ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{3\pi\gamma_1}{r_0 \rho_X} X (R_{\max}^3 - r_0^3)\right]^i}{1(1+1 \cdot 3)(1+2 \cdot 3)\dots(1+i \cdot 3)}$ является сходящимся, так

как «предельное» расстояние, на котором клетки способны оказывать друг на друга воздействие посредством излучения, $R_{\max} \ll 1$, так же как и радиус планктонной клетки $r_0 \ll 1$.

К системе (8')–(9') также необходимо добавить:

- ◆ граничные условия первого рода:

$$X(R, t) = \text{const}, \quad S(R, t) = \text{const};$$

- ◆ граничные условия второго рода:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=R} = 0;$$

- ◆ нелокальные граничные условия, обеспечивающие выделение единственного решения:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \frac{\partial X}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \frac{\partial S}{\partial r} = 0.$$

Выведем достаточные условия существования единственного решения.

Будем рассматривать область $G = \{r: 0 < r < R\}$. $\Gamma = \bar{G} \setminus G$ – граница области G . Введем на границе Γ области G функции

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, u_n \geq 0, \\ 0, u_n < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad u_n^- = u_n - u_n^+. \quad (12)$$

Поделим временной интервал $0 \leq t \leq T$ на достаточно малые отрезки времени $t_{n-1} \leq t \leq t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, на каждом из которых запишем линеаризованную систему уравнений вида

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{U}X) = \mu_X \Delta X + k_1 X S^n - \alpha X, \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{U}S) = \mu_S \Delta S - k_2 X^n S + \beta(S' - S) + f(r, t). \quad (14)$$

К системе уравнений (13)–(14) присоединим:

◆ начальные условия:

$$X(r, 0) = X_0(r), \quad S(r, 0) = S_0(r), \quad r \in \bar{G}, \quad t = 0; \quad (15)$$

◆ граничные условия:

$$X(R, t) = \mu(R, t), \quad S(R, t) = \vartheta(R, t), \quad R \in \Gamma,$$

т.е.

$$\frac{\partial X}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \quad (16)$$

◆ условия периодичности:

$$X(r, t) = X(r, t + T), \quad S(r, t) = S(r, t + T), \quad (17)$$

где $T > 0$, T – период;

◆ нелокальные граничные условия:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \frac{\partial X}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \quad (18)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $k_1 = k_2$.

Получим квадратичный функционал, который используется для доказательства единственности решения задачи (13)–(18). Умножим обе части уравнения (13) и (14) соответственно на функции X и S и проинтегрируем каждое из полученных равенств по области G и по временной переменной t , $t_{n-1} \leq t \leq t_n$, а затем просуммируем по $n = 1, 2, \dots, n_0$, и, складывая полученные равенства, в итоге получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G X \operatorname{div}(UX) dG + \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial S^2}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G S \operatorname{div}(US) dG = \\ & = \mu_X \int_0^T dt \int_G X \Delta X dG + k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) - \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \mu_S \int_0^T dt \int_G S \Delta S dG - \\ & - k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG \right) + \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG + \int_0^T dt \int_G f S dG. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу условий периодичности (17) имеем тождества

$$\int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial t} dG = 0, \quad \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial S^2}{\partial t} dG = 0. \quad (20)$$

Применяя теорему Остроградского–Гаусса, получим равенства

$$\int_G X \operatorname{div}(UX) dG = \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Gamma, \quad \int_G S \operatorname{div}(US) dG = \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Gamma. \quad (21)$$

Далее преобразуем левую часть соотношения (19), используя формулы (20) и (21), и получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Gamma + \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Gamma = \mu_x \int_0^T dt \int_G X \Delta X dG + k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) - \\ - \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \mu_s \int_0^T dt \int_G S \Delta S dG - k_1 \sum_{n=0}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG \right) + \\ + \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG + \int_0^T dt \int_G f S dG. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая формулу Грина и граничные условия (16), получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mu_x \int_0^T dt \int_G X \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right) dG + \mu_s \int_0^T dt \int_G S \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \right) dG = -\mu_x \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 dG - \\ - \mu_s \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 dG + \mu_x \int_0^T dt \int_{\Gamma} X \frac{\partial X}{\partial n} d\Gamma + \mu_s \int_0^T dt \int_{\Gamma} S \frac{\partial S}{\partial n} d\Gamma = \\ = -\mu_x \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 dG - \mu_s \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 dG. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя формулу (23), преобразуем правую часть соотношения (22). Тогда квадратичный функционал можно записать в виде

$$\begin{aligned} I = \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Gamma + \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Gamma + \mu_x \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 dG + \\ + \mu_s \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 dG - k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) + \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \\ + k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG \right) - \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG - \int_0^T dt \int_G f S dG. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть H_r – максимальный размер области G в направлении координатной оси Or . Справедливо неравенство Фридрикса:

$$\int_0^T dt \int_G \mu_x \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 dG \geq \frac{4\mu_x}{(H_r)^2} \int_0^T dt \int_G X^2 dG.$$

Заменим выражение в левой части функционала I в соответствии с неравенством Фридрикса на не превосходящий его член, таким образом, мы построим функционал \tilde{I} :

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = & \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} X^2 d\Gamma + \int_0^t dt \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} S^2 d\Gamma + \frac{4\mu_x}{(H_r)^2} \int_0^T dt \int_G X^2 dG - \\
& - k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G X^2 S^n dG \right) + \alpha \int_0^T dt \int_G X^2 dG + \mu_s \int_0^T dt \int_G \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 dG + \\
& + k_1 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \int_G S^2 X^n dG \right) - \beta \int_0^T dt \int_G S^2 dG - \int_0^T dt \int_G f S dG. \quad (25)
\end{aligned}$$

Пусть вначале $n_0 = 1$ и на первом временном интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ выполняется неравенство

$$\frac{4\mu_x}{(H_r)^2} + \alpha - k_1 \max_G \{S^0\} \geq 0. \quad (26)$$

Предположим, что решение системы (13)–(18) не единственно, т.е.

$$w = X' - X'' \neq 0, \quad \omega = S' - S'' \neq 0. \quad (27)$$

Тогда функционал \tilde{I} для функций w и ω имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = & \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} w^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{u_n^+}{2} \omega^2 d\Gamma + \frac{4\mu_x}{(H_r)^2} \int_0^{t_1} dt \int_G w^2 dG - k_1 \int_0^{t_1} dt \int_G w^2 S^0 dG + \\
& + \alpha \int_0^{t_1} dt \int_G w^2 dG + \mu_s \int_0^{t_1} dt \int_G \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 dG + k_1 \int_0^{t_1} dt \int_G \omega^2 X^0 dG - \beta \int_0^{t_1} dt \int_G \omega^2 dG = 0.
\end{aligned}$$

Но в силу неравенства (26) $\tilde{I} > 0$. Пришли к противоречию, в силу которого $w = 0$, $\omega = 0$ для $t_0 \leq t \leq t_1$. Аналогично для любого $n = 1, \dots, n_0 - 1$ в предположении

$$\frac{4\mu_x}{(H_r)^2} + \alpha - k_1 \max_G \{S^n\} \geq 0 \quad (28)$$

доказывается единственность решения задачи (13)–(18).

Таким образом, условие (28) – достаточное условие единственности решения задачи (13)–(18).

В ходе работы была построена дискретная модель задачи (13)–(18), доказана ее устойчивость и консервативность.

Результаты численного решения задачи можно представить в виде графика, показывающего распределение концентрации фитопланктона на пространственном участке R в разные моменты времени от начала эксперимента.

Был выполнен ряд численных экспериментов для различных начальных условий: от практически однородных по пространству (с начальными флуктуациями плотности порядка 0,1–0,9 %) (рис. 3) до сильно неоднородных (рис. 4).

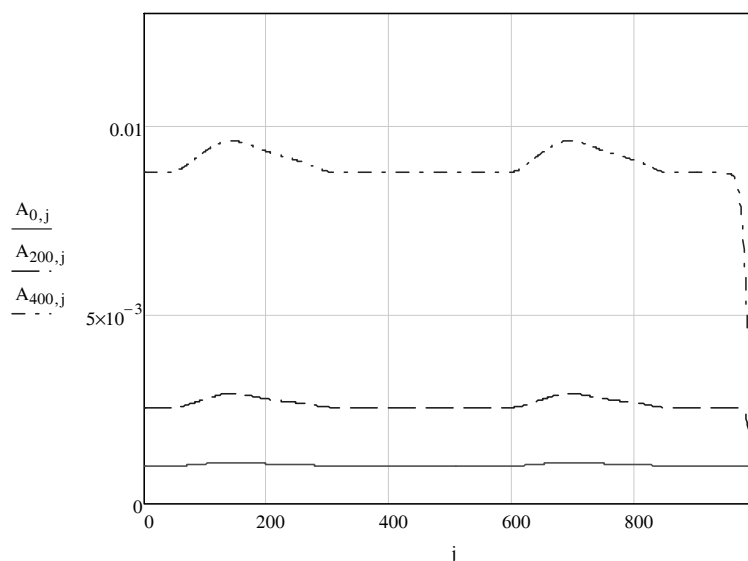


Рис. 3. График распределения концентрации фитопланктона в случае практически однородных по пространству начальных условий

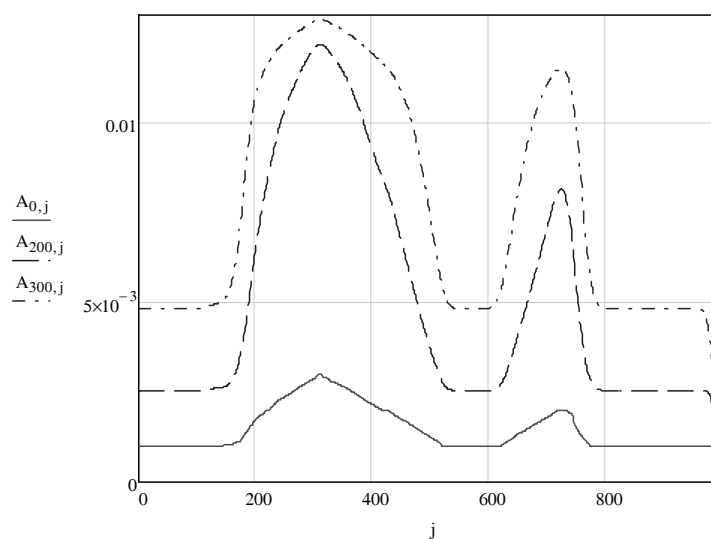


Рис. 4. График распределения концентрации фитопланктона в случае сильно неоднородных по пространству начальных условий

Во всех указанных случаях для набора входных параметров, определяющих чувствительность популяции к собственному электромагнитному излучению (в том числе в видимом спектре), была получена устойчивая неоднородная структура, которая сохраняла свои особенности («пятнистость») вплоть до снижения концентрации биогенного вещества до $10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что механизм стимуляции размножения за счет внутренней люминесценции является обоснованной гипотезой, объясняющей феномен «пятнистости» распределения фитопланктона в водных экосистемах – устойчивой диссипативной структуры в виде «пятен» повышенной концентрации фитопланктона.

Для подтверждения данной гипотезы требуются дополнительные натурные эксперименты и исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
3. Беляев В.И., Кондуфорова Н. В. Математическое моделирование экологических систем шельфа. – Киев: Наукова думка, 1990. – 240 с.
4. Сухинов А.И. Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 408 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д. ф.-м. н., профессор Г.В. Куповых.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Герасименко Лилия Владимировна

E-mail: gerasimenko.liliya@yandex.ru.

Тел.: 88634603916; +79045070406.

Кафедра высшей математики; студентка.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Gerasimenko Liliya Vladimirovna

E-mail: gerasimenko.liliya@yandex.ru.

Phone: +78634603916; +79045070406.

The Department of Higher Mathematics; student.

УДК 519.63:532.55

А.В. Никитина, К.А. Лозовская

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛАНКТОНА И ПОПУЛЯЦИИ ПРОМЫСЛОВОЙ РЫБЫ ПЕЛЕНГАС

Предложена нелинейная пространственно-неоднородная 3D-модель взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас. Для численного решения задачи использовались неявные конечно-разностные схемы второго порядка точности. Устойчи-