

УДК 621.371

А.И. Сухинов, Е.С. Огурцов, А.Е. Чистяков

**ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННОЙ
РЕШЕТКОЙ ИЗ СКОШЕННЫХ ВОЛНОВОДОВ**

Разработка оптимальных конструкций антенных решеток в настоящее время является актуальной задачей. Для этого необходимо рассчитать характеристики направленности антенных решеток.

В данной работе построена дискретная математическая модель распространения электромагнитных волн антенной решеткой из скошенных волноводов. Для повышения реальной точности решений были использованы сетки, учитывающие заполненность расчетных ячеек. Дискретная модель построена на основе метода баланса. Приведены результаты численных экспериментов для различных углов скоса волноводной антенной решетки.

Система уравнений Максвелла; антенная решетка; метода баланса; трехслойные итерационные схемы.

A.I. Sukhinov, E.S.Ogurtsov, A.E.Chistyakov

**CONSTRUCTION OF THE DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF THE
EMISSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES OF LINEAR ANTENNA
ARRAY COMPOSED OF SLOPED WAVEGUIDES**

Development of optimal design of antenna arrays is now an urgent task. You must calculate the directional characteristics of antenna arrays.

In this article a discrete mathematical model of propagation of electromagnetic waves from an antenna array of beveled waveguides. To improve the smoothness of the grid were used, taking into account the occupancy of cells. A discrete model constructed on the basis of balance.

The results of numerical experiments for different bevel angles of the waveguide array. Maxwell equation; antenna array; a method of balance; three-layer iteration scheme.

Основные уравнения. Запишем исходную систему уравнений Максвелла [1,2] в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Получим волновые уравнения для электрической и магнитной составляющей поля из системы уравнений Максвелла [1,2]. Для этого запишем соотношение для ротора электрического поля

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu \partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5)$$

Уравнение (5) векторно умножим на ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \right) = -\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right) = \\ &= -\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}) \right) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая соотношение

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \quad (7)$$

получим выражение

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Так как дивергенция электрического поля в диэлектрической среде выражается $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, то в однородной среде $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

Запишем волновое уравнение для электрической составляющей поля:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (9)$$

или в виде

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Аналогично запишем волновое уравнение для магнитной составляющей поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Постановка задачи. Требуется найти решение неоднородного волнового уравнения [3]:

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{H} + f, \quad (12)$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$H(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad H'_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y) \quad (13)$$

и граничным условиям (для Е-поляризованной волны):

$$H(x, y, t) = 0, \quad \text{при } (x, y) \in \gamma. \quad (14)$$

В случае Н-поляризованной волны граничное условие запишется в виде

$$B'_n(x, y, t) = 0, \quad \text{при } (x, y) \in \gamma. \quad (15)$$

На рис. 1 представлена антенная решетка из скошенных волноводов. Решетка работает в режиме излучения.

Наиболее эффективными методами для решения подобного вида задач являются сеточные методы.

Решение задачи. Для получения дискретной модели воспользуемся интегроинтерполяционным методом [4–6]. Для этого запишем уравнение (12) в следующем виде:

$$H''_n = a^2 (H'_x)'_x + a^2 (H'_y)'_y + f, \quad a = \frac{1}{\varepsilon \mu}. \quad (16)$$

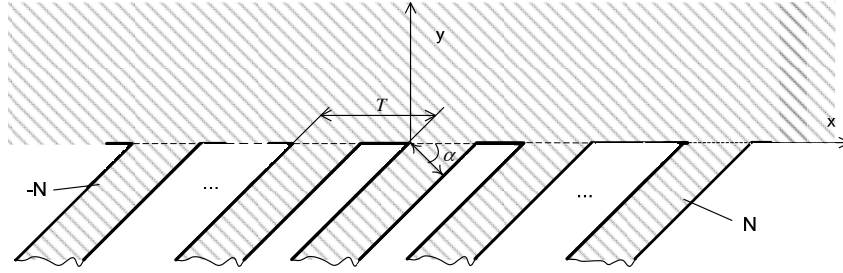


Рис. 1. Антенная решетка (расчетная область показана штриховкой)

Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (16) с соответствующими граничными и начальными условиями (13)-(15).

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\begin{aligned}\omega_t &= \{t^n = nh_t, 0 \leq n \leq N_t - 1, l_t = h_t (N_t - 1)\}, \\ \omega_x &= \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x (N_x - 1)\}, \\ \omega_y &= \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y (N_y - 1)\},\end{aligned}$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Проинтегрируем уравнение (16) по области D_{txy} :

$$D_{txy} \in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \right\},$$

в результате чего получим:

$$\iiint_{D_{txy}} H''_u dt dx dy = a^2 \iiint_{D_{txy}} H''_{xx} dt dx dy + a^2 \iiint_{D_{txy}} H''_{yy} dt dx dy + \iiint_{D_{txy}} f dt dx dy. \quad (17)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части уравнения (17):

$$\begin{aligned}\iiint_{D_{txy}} H''_u dt dx dy &= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} H''_u dy \approx h_x h_y \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} H''_u|_{(x,y)=(x_i,y_j)} dt = \\ &= h_x h_y \left(H'_t|_{t^{n+1/2}} \right)_{(x,y)=(x_i,y_j)}.\end{aligned}$$

Найдем аппроксимацию выражения $H_t' \Big|_{t^{n+1/2}}$. Для этого введем обозначение $G = H_t'$ и проинтегрируем данное выражение на отрезке $t \in [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} G dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} H_t' dt$$

или

$$G^{n+1/2} h_t = H^{n+1} - H^n.$$

Таким образом, получим

$$H_t' \Big|_{t^{n+1/2}} = \frac{H^{n+1} - H^n}{h_t},$$

$$\iiint_{D_{xy}} H_{tt}'' dt dx dy \simeq \left(\frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{h_t} - \frac{H_{i,j}^n - H_{i,j}^{n-1}}{h_t} \right) h_x h_y. \quad (18)$$

Аналогичным образом можно вычислить интегралы, стоящие в правой части выражения (17), первый из которых запишется в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xy}} H_{xx}'' dt dx dy &= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} H_{xx}'' dy \simeq \\ &= h_y \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \left(\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_x} - \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{h_x} \right) dt \simeq \\ &= h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\bar{H}_{i,j} = \sigma_1 H_{i,j}^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) H_{i,j}^n + \sigma_2 H_{i,j}^{n-1}$.

Запишем второй интеграл, стоящий в правой части выражения (17)

$$\iiint_{D_{xy}} H_{yy}'' dt dx dy \simeq h_x h_t \left(\frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y} \right). \quad (20)$$

В силу теоремы о среднем, оставшийся интеграл в выражении (17) запишется в виде

$$\iiint_{D_{xy}} f dt dx dy \simeq f_{i,j}^n h_x h_y h_t. \quad (21)$$

Таким образом, выражение (17) с учетом (16)–(21) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{h_t} - \frac{H_{i,j}^n - H_{i,j}^{n-1}}{h_t} \right) h_x h_y &= a^2 h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} \right) + \\ &+ a^2 h_x h_t \left(\frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y} \right) + f_{i,j}^n h_x h_y h_t. \end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на $h_x h_y h_t$, в результате получим конечно-разностную схему, аппроксимирующую задачу (16):

$$\frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} = a^2 \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + a^2 \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + f_{i,j}^n, \quad (22)$$

где $\bar{H}_{i,j} = \sigma_1 H_{i,j}^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) H_{i,j}^n + \sigma_2 H_{i,j}^{n-1}$.

Аппроксимация граничных условий. Для повышения реальной точности решений, которые повлекут улучшение «гладкости» сеточного решения, будем предполагать, что ячейки заполнены не полностью [4–6]. Областью Ω_{txy} будем называть заполненную часть области D_{txy} . Также ведем обозначения для следующих областей:

$$\begin{aligned} D_1 &\in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_i, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \right\}, \\ D_2 &\in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_{i-1/2}, x_i], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \right\}, \\ D_3 &\in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_j, y_{j+1/2}] \right\}, \\ D_4 &\in \left\{ t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_j] \right\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты заполненности k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 для областей $D_{txy}, D_1, D_2, D_3, D_4$ вводятся следующим образом:

$$k_0 = \frac{S_{D_{txy}}}{S_{\Omega_{txy}}}, \quad k_i = \frac{S_{D_i}}{S_{\Omega_i}}, \quad i = \overline{1, 4},$$

где Ω_i – заполненная часть области D_i .

Третья краевая задача. Запишем аппроксимацию уравнения (16) в случае граничных условий третьего рода:

$$H'_n(t, x, y) = \alpha H + \beta.$$

Уравнение (16) может быть записано следующим образом:

$$L(H) = 0, \quad (23)$$

где

$$L(H) = \begin{cases} H''_{tt} - a^2 (H'_x)'_x - a^2 (H'_y)'_y - f, & (x, y) \in \Omega_{txy}, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_{txy}. \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнение (23) по области D_{txy} , получим

$$\iiint_{D_{txy}} L(H) dt dx dy = 0.$$

Преобразуем левую часть полученного выражения

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{txy}} L(H) dt dx dy &= \iiint_{\Omega_{txy}} \left(H''_{tt} - a^2 (H'_x)'_x - a^2 (H'_y)'_y - f \right) dt dx dy = \\ &= \iiint_{\Omega_{txy}} H''_{tt} dt dx dy - a^2 \iiint_{\Omega_{txy}} (H'_x)'_x dt dx dy - \\ &\quad - a^2 \iiint_{\Omega_{txy}} (H'_y)'_y dt dx dy - \iiint_{\Omega_{txy}} f dt dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Первый интеграл в выражении (24) запишется в виде

$$\iiint_{\Omega_{xy}} H''_n dt dx dy \approx k_{0,i,j} \iiint_{D_{xy}} H''_n dt dx dy = k_{0,i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t} h_x h_y.$$

Предположим, что $S_{\Omega_1} > S_{\Omega_2}$, тогда мы можем ввести следующие обозначения: $\Omega_1 = \Omega_{1,1} \cup \Omega_{1,2}$, при этом $S_{\Omega_{1,2}} = S_{\Omega_2}$. С учетом введенных обозначений запишем второй интеграл в выражении (24):

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{xy}} (H'_x)'_x dt dx dy &= \iiint_{\Omega_{1,1}} (H'_x)'_x dt dx dy + \iiint_{\Omega_{1,2} \cup \Omega_2} (H'_x)'_x dt dx dy \approx \\ &\approx (k_{1,i,j} - k_{2,i,j}) \iiint_{D_1} (H'_x)'_x dt dx dy + k_{2,i,j} \iiint_{D_{xy}} (H'_x)'_x dt dx dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычислим по отдельности каждый из полученных интегралов

$$\begin{aligned} \iiint_{D_1} (H'_x)'_x dt dx dy &= \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} dt \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} H''_{xx} dy \approx \\ &\approx h_y h_t \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \bar{H}''_{xx} dx \Big|_{y=y_j} \approx h_y h_t \bar{H}'_x \Big|_{(x,y)=(x_i,y_j)}^{(x,y)=(x_{i+1/2},y_j)} = h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \alpha \bar{H}_{i,j} - \beta \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл в выражении (25) вычисляется согласно формуле (20). Таким образом, формула (25) примет вид

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{xy}} (H'_x)'_x dt dx dy &\approx (k_{1,i,j} - k_{2,i,j}) h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \alpha \bar{H}_{i,j} - \beta \right) + \\ &+ k_{2,i,j} h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} \right) = \\ &= h_y h_t \left(k_{1,i,j} \frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - k_{2,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} + (k_{2,i,j} - k_{1,i,j}) (\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta) \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно вычислить третий интеграл в уравнении (24):

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{xy}} (H'_y)'_y dt dx dy &= \\ &= h_x h_t \left(k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y} - k_{4,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y} + (k_{4,i,j} - k_{3,i,j}) (\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta) \right). \end{aligned}$$

Четвертый интеграл в выражении (24) примет вид

$$\iiint_{\Omega_{xy}} f dt dx dy = k_{0,i,j} f_{i,j}^n h_x h_y h_t.$$

Таким образом, получим дискретный аналог уравнения (16) в случае граничных условий третьего рода:

$$\begin{aligned}
 & k_{0,i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t} h_x h_y = \\
 & = a^2 h_y h_t \left(k_{1,i,j} \frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - k_{2,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} + (k_{2,i,j} - k_{1,i,j})(\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta) \right) + \\
 & + a^2 h_x h_t \left(k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y} - k_{4,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y} + (k_{4,i,j} - k_{3,i,j})(\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta) \right) + \\
 & + k_{0,i,j} f_{i,j}^n h_x h_y h_t.
 \end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на $h_x h_y h_t$, в результате получим

$$\begin{aligned}
 & k_{0,i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} = \\
 & = a^2 \left(k_{1,i,j} \frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x^2} - k_{2,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + (k_{2,i,j} - k_{1,i,j}) \frac{\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta}{h_x} \right) + \\
 & + a^2 \left(k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y^2} - k_{4,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + (k_{4,i,j} - k_{3,i,j}) \frac{\alpha \bar{H}_{i,j} + \beta}{h_y} \right) + \\
 & + k_{0,i,j} f_{i,j}^n.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Дискретный аналог уравнения (16) в случае граничных условий в форме Неймана ($H'_n = 0$) примет вид

$$\begin{aligned}
 k_{0,i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} & = a^2 \left(k_{1,i,j} \frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x^2} - k_{2,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} \right) + \\
 & + a^2 \left(k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y^2} - k_{4,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} \right) + k_{0,i,j} f_{i,j}^n.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Первая краевая задача. Запишем аппроксимацию уравнения (16) в случае граничных условий первого рода:

$$H(t, x, y) = \alpha.$$

Уравнение (16) может быть записано следующим образом:

$$L(H) = 0, \tag{28}$$

$$\text{где } L(H) = \begin{cases} H''_n - a^2 (H'_x)'_x - a^2 (H'_y)'_y - f, & (x, y) \in \Omega_{D_{xy}}, \\ C(H - \alpha), & (x, y) \notin \Omega_{D_{xy}}. \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнение (28) по области $D_{D_{xy}}$, получим:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{D_{xy}}} L(H) dt dx dy & = \iiint_{\Omega_{D_{xy}}} \left(H''_n - a^2 (H'_x)'_x - a^2 (H'_y)'_y - f \right) dt dx dy + \\
 & + \iiint_{D_{D_{xy}} \setminus \Omega_{D_{xy}}} C(H - \alpha) dt dx dy.
 \end{aligned}$$

Значения интегралов $\iiint_{\Omega_{xy}} H''_{tt} dt dx dy$ и $\iiint_{\Omega_{xy}} f dt dx dy$ будут такими же, как и в случае граничных условий третьего рода. Вычислим интеграл $\iiint_{\Omega_{xy}} H''_{xx} dt dx dy$ в

случае $S_{\Omega_1} > S_{\Omega_2}$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{xy}} (H'_x)'_x dt dx dy &= \iiint_{\Omega_{1,1}} (H'_x)'_x dt dx dy + \iiint_{\Omega_{1,2} \cup \Omega_2} (H'_x)'_x dt dx dy \approx \\ &\approx k_{2,i,j} \iiint_{D_{xy}} (H'_x)'_x dt dx dy = k_{2,i,j} h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} \right). \end{aligned}$$

В общем случае можно записать:

$$\iiint_{\Omega_{xy}} H''_{xx} dt dx dy \approx \min(k_{1,i,j}, k_{2,i,j}) h_y h_t \left(\frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j}}{h_x} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{h_x} \right).$$

Значение интеграла $\iiint_{\Omega_{xy}} H''_{yy} dt dx dy$ запишется аналогичным образом:

$$\iiint_{\Omega_{xy}} H''_{yy} dt dx dy \approx \min(k_{3,i,j}, k_{4,i,j}) h_x h_t \left(\frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j}}{h_y} - \frac{\bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{h_y} \right).$$

Вычислим $\iiint_{D_{xy}/\Omega_{xy}} C(H - \alpha) dt dx dy$:

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xy}/\Omega_{xy}} C(H - \alpha) dt dx dy &= (1 - k_{0,i,j}) C \iiint_{D_{xy}} (H - \alpha) dt dx dy = \\ &= (1 - k_{0,i,j}) C (H_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}) h_x h_y. \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимация уравнения (16) в случае граничных условий первого рода примет вид

$$\begin{aligned} k_{0,i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - 2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} + C(1 - k_{0,i,j}) H_{i,j}^{n+1} = \\ = C(1 - k_{0,i,j}) \alpha_{i,j} + a^2 \min(k_{1,i,j}, k_{2,i,j}) \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + \\ + a^2 \min(k_{3,i,j}, k_{4,i,j}) k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + k_{0,i,j} f_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Константа C равна $1/h_t^2$. При данном равенстве дискретная модель будет консервативна. Таким образом, получим следующую дискретную модель:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i,j}^{n+1}}{h_t^2} + k_{0,i,j} \frac{-2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} = \\ & = \frac{(1-k_{0,i,j})\alpha_{i,j}}{h_t^2} + a^2 \min(k_{1,i,j}, k_{2,i,j}) \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + \\ & + a^2 \min(k_{3,i,j}, k_{4,i,j}) k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + k_{0,i,j} f_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (29)$$

Дискретный аналог уравнения (16) в случае граничных условий в форме Дирихле ($H = 0$) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i,j}^{n+1}}{h_t^2} + k_{0,i,j} \frac{-2H_{i,j}^n + H_{i,j}^{n-1}}{h_t^2} = a^2 \min(k_{1,i,j}, k_{2,i,j}) \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{h_x^2} + \\ & + a^2 \min(k_{3,i,j}, k_{4,i,j}) k_{3,i,j} \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{h_y^2} + k_{0,i,j} f_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (30)$$

Результаты численных экспериментов. На рис. 3–5 представлены результаты математического моделирования излучения электромагнитных волн линейной антенной решеткой из скошенных волноводов для различных углов скоса α волноводов.

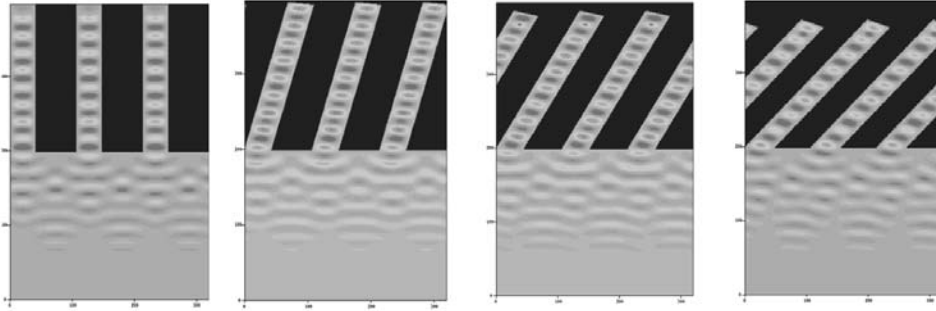


Рис. 2. Угол скоса $\alpha = 0^\circ$

Рис. 3. Угол скоса $\alpha = 10^\circ$

Рис. 4. Угол скоса $\alpha = 20^\circ$

Рис. 5. Угол скоса $\alpha = 40^\circ$

На рис. 2 представлен результат математического моделирования для нескосенного волновода (угол $\alpha = 0^\circ$). На рис. 3 – угол скоса $\alpha = 10^\circ$, на рис. 4 – угол скоса $\alpha = 20^\circ$, на рис. 5 – угол скоса $\alpha = 40^\circ$.

Результаты математического моделирования электромагнитных полей были использованы для построения оптимальных конструкций антенных решеток [7–14].

Выводы. В работе получены соотношения для дискретных математических моделей излучения электромагнитных волн линейной антенной решеткой из скошенных волноводов в случае граничных условий первого и второго рода. В работе применен адаптивный попеременно-треугольный метод скорейшего спуска [4–5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 1983.
2. Чететка В.В. Методы решения граничных задач электродинамики. – Таганрог: ТРТИ, 1980.

3. *Сухинов А.И., Зуев В.Н., Семенистый В.В.* Уравнения математической физики. – Таганрог: ТРТУ, 2005.
4. *Сухинов А.И., Шишениа А.В.* Улучшение оценки параметра γ_1 попеременно-треугольного итерационного метода с априорной информацией // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 7-15.
5. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 7-15.
6. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
7. *Сухинов А.И., Огурцов Е.С., Огурцов С.Ф.* Решение о выдаче патента на изобретение от 18.01.11 по заявке на изобретение №2010113122 «Самофазирующаяся антенная решетка из N-пар скошенных волноводов в разные стороны». – М.: ФГУ ФИПС, 2011.
8. *Огурцов Е.С., Огурцов С.Ф.* Заявка на изобретение № 2010101616 от 19.01.2010. Электродинамическая приемопередающая антенная решетка из N-пар скошенных волноводов в одну сторону. – М.: ФГУ ФИПС, 2010
9. *Огурцов Е.С., Огурцов С.Ф.* Заявка на изобретение № 2010104512 от 9.02.2010. Электродинамическая приемопередающая антенная решетка наклонной поляризации из 2*N-пар скошенных волноводов и наклоненных навстречу друг другу. – М.: ФГУ ФИПС, 2010.
10. *Огурцов Е.С.* Заявка на изобретение №2010107503 от 1.03.2010. Электродинамическая приемопередающая антенная решетка наклонной поляризации из 2*N-ПАР V-образных вибраторов направленных в разные стороны в пространстве. – М.: ФГУ ФИПС, 2010.
11. *Огурцов Е.С.* Заявка на изобретение №2010107498 от 1.03.2010. Электродинамическая широкодиапазонная приемопередающая антенная решетка наклонной поляризации из 2*N-ПАР V-образных вибраторов, расположенных в плоскости. – М.: ФГУ ФИПС, 2010.
12. *Огурцов Е.С., Огурцов С.Ф.* Плоская антенная решетка из N-пар скошенных в E-плоскости волноводов для информационных систем энергетики // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 1 (102). – С. 197-201.
13. *Огурцов Е.С., Огурцов С.Ф.* Линейная двумерная антенная решетка из N-пар скошенных в E-плоскости волноводов для информационных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 2 (103). – С. 35-38.
14. *Огурцов Е.С.* Исследование диаграмм рассеяния и направленности азимутальной антенной решетки из скошенных волноводов в меридиональной плоскости, для случая N-поляризованной волны // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 11 (88). – С. 34-35.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.Б. Старченко.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.м.н.; профессор.

Огурцов Евгений Сергеевич,

E-mail: evg8787@mail.ru.

Тел.: 88634683076.

Кафедра высшей математики; аспирант.

Чистяков Александр Евгеньевич

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; ассистент.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Ogurtsov Evgeny Sergeevich,

E-mail: evg8787@mail.ru.

Phone: +78634683076.

The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

УДК 519.6

Н.А. Фоменко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
ОБТЕКАНИИ КОРПУСА СУДНА**

Рассмотрена модель движения жидкости, обтекающей корпус судна. Для построения данной математической модели использован метод поправки к давлению для задач волновой динамики, для получения консервативной разностной схемы использован интегро-интерполяционный метод. В работе выполнена программная реализация разработанной двумерной математической модели волновых процессов жидкой среды. Программа предназначена для построения двумерных полей скоростей движения водной среды в случае нахождения на водной поверхности судна. Приведены результаты численных экспериментов.

Математическая модель; обтекание корпуса судна; сеточные уравнения.

N.A. Fomenko

**MODELLING OF HYDRODYNAMICS PROCESSES AT THE FLOW OF CASE
OF THE VESSEL**

In this paper, a mathematical model for simulation of fluid flowing around the vessel. For construction of the given mathematical model is used the amendment method to pressure for problems of wave dynamics, for reception conservative differential schemes is used integro-interpolation method. In work a program realization of the developed two-dimensional mathematical model of wave processes of the liquid environment is executed. The program is intended for construction of two-dimensional fields of speeds of movement of the water environment in case of a finding a vessel on a water surface. Computer realization of two-dimensional mathematical model of water medium moving has been presented.

Modeling of water medium; flow around the vessel; grid equations.

При движении судов в мелководных водоемах по судоходным каналам возникает движение водной среды, вызванное как движением самого корпуса, так и в результате действия гребного винта. Данные процессы в условиях мелководья приводят к подъему донных отложений и размыву стенок каналов, с одновременным отложением взмученной взвеси. Это, в свою очередь, приводит к нежелательному изменению геометрии дна канала, в частности изменению его глубины. Для прогнозирования процессов заиления необходимо детально исследовать гидродинамические процессы, происходящие в водной среде вблизи судна.